38 Teoria względności

Współczesna nawigacja dalekiego zasięgu wymaga ciągłego i precyzyjnego wyznaczania położenia i prędkości samolotu. System nawigacji satelitarnej NAVSTAR pozwala w dowolnym punkcie Ziemi określić położenie i prędkość z dokładnością odpowiednio 16 m i 2 cm/s. Gdyby zaniedbano efekty wynikające z teorii względności, prędkości nie można by wyznaczyć z dokładnością lepszą niż 20 cm/s, co we współczesnych systemach nawigacyjnych jest nie do przyjęcia.

Jak to możliwe, że coś równie abstrakcyjnego, jak stworzona przez Einsteina szczególna teoria względności znajduje zastosowanie w tak praktycznej dziedzinie, jak nawigacja?

Odpowiedź znajdziesz w tym rozdziale.

38.1. Czym zajmuje się teoria względności?

Głównym przedmiotem zainteresowania **teorii względności** są pomiary zdarzeń (czegoś, co się dzieje) — ustalenia, gdzie i kiedy one zachodzą, a także jaka odległość dzieli je w czasie i przestrzeni. Ponadto teoria względności zajmuje się transformacjami wyników pomiarów tego typu między poruszającymi się względem siebie układami odniesienia. (Stąd nazwa *teoria względności*). Podobne zagadnienia omawialiśmy już w paragrafach 4.8 i 4.9.

Do roku 1905 fizykom wydawało się, że doskonale rozumieją zagadnienia związane z poruszającymi się układami odniesienia i transformacjami między nimi. Właśnie wtedy Albert Einstein (rys. 38.1) opublikował swoją **szczególną teorię względności**. Przymiotnik *szczególna* oznacza, że dotyczy ona tylko **inercjalnych układów odniesienia**, czyli takich, w których obowiązują zasady dynamiki Newtona. Oznacza to, że układy odniesienia nie przyspieszają, ale przeciwnie — poruszają się względem siebie ze stałymi prędkościami. (Stworzona także przez Einsteina *ogólna teoria względności* opisuje trudniejszy przypadek, w którym układy odniesienia mogą przyspieszać; w tym rozdziale, mówiąc o *teorii względności*, będziemy myśleć tylko o inercjalnych układach odniesienia).

Einstein wprowadził w osłupienie cały świat naukowy, ponieważ wychodząc z dwóch pozornie prostych założeń, wykazał, że stare wyobrażenia na temat względności były błędne, chociaż każdy uznawał je za całkowicie zgodne ze zdrowym rozsądkiem. Ale wspomniany zdrowy rozsądek opierał się na doświadczeniach z ciałami, które poruszały się dość wolno. Stworzona przez Einsteina teoria względności — słuszna dla wszystkich prędkości — przewidywała wiele zjawisk, które wydawały się dziwaczne, gdyż nikt ich nie obserwował.

Rys. 38.1. Einstein w pierwszych latach XX wieku przy biurku w urzędzie patentowym w Bernie, w Szwajcarii, gdzie pracował w momencie opublikowania szczególnej teorii względności

W szczególności Einstein wykazał, że przestrzeń i czas są wzajemnie powiązane; oznacza to, że odstęp czasu dzielący dwa zdarzenia zależy od ich odległości w przestrzeni i na odwrót. Co więcej, zależności te są różne dla obserwatorów poruszających się względem siebie. Jednym z wniosków jest stwierdzenie, że czas nie płynie ze stałą szybkością, jakby odmierzał go z mechaniczną dokładnością jakiś absolutny zegar sterujący Wszechświatem. Szybkość upływu czasu jest zmienna — zależy od względnego ruchu. Przed rokiem 1905 tylko marzyciele myśleli w ten sposób. Dziś naukowcy i inżynierowie przyjmują to za pewnik, gdyż ich doświadczenia ze szczególną teorią względności zmieniły to, co uznajemy za zdrowy rozsądek.

Mówi się, że szczególna teoria względności jest trudna. Nie wynika to ze skomplikowanego aparatu matematycznego, przynajmniej nie będzie tak w przypadku naszego podręcznika. Trudność bierze się stąd, że trzeba zwracać baczną uwagę na to, *kto* dokonuje pomiaru, *co* mierzy i w *jaki* sposób — właśnie to sprawia problemy, gdyż często stoi w sprzeczności z naszym zdrowym rozsądkiem.

38.2. Postulaty

Przyjrzymy się teraz dwóm postulatom, które są podstawą stworzonej przez Einsteina teorii:

1. **Postulat względności:** Dla wszystkich obserwatorów w inercjalnych układach odniesienia prawa fizyki są takie same. Żaden z układów nie jest wyróżniony.

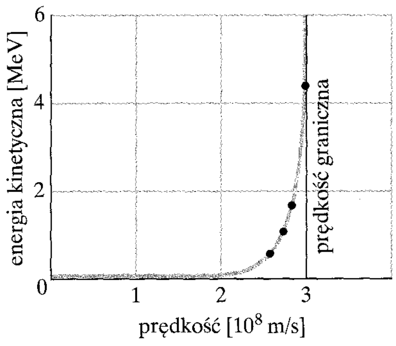
Galileusz założył, że prawa *mechaniki* są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. (Ważną tego konsekwencją jest pierwsza zasada dynamiki Newtona). Einstein rozszerzył to założenie na *wszystkie* prawa fizyki, w tym także elektromagnetyzmu i optyki. Postulat ten *nie* oznacza, że obserwatorzy we wszystkich układach inercjalnych, którzy mierzą wielkości fizyczne, uzyskają takie same wartości — w większości przypadków wcale tak nie będzie. To *prawa fizyki*, które wiążą ze sobą wyniki pomiarów, mają być takie same.

2. **Postulat stałej prędkości światła:** We wszystkich inercjalnych układach odniesienia i we wszystkich kierunkach światło rozchodzi się w próżni z tą samą prędkością c.

Ten sam postulat sformułowany inaczej oznacza, że w przyrodzie istnieje pewna *nieprzekraczalna prędkość* c, która ma taką samą wartość we wszystkich kierunkach i wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Okazuje się, że właśnie światło porusza się z tą graniczną prędkością, podobnie jak wszystkie cząstki pozbawione masy (z dobrym przybliżeniem można za takie cząstki uważać neutrina, których masy są niezwykle małe). Prędkość żadnego ciała przenoszącego energię lub informacje nie może przekroczyć prędkości granicznej. Co więcej, żadna cząstka mająca masę nie może osiągnąć prędkości c, niezależnie od tego, jak długo byłaby przyspieszana.

Obydwa postulaty były wielokrotnie weryfikowane i nigdy nie znaleziono jakiegokolwiek od nich odstępstwa.

Prędkość graniczna



Rys. 38.2. Punkty przedstawiające wyniki pomiarów energii kinetycznej elektronu w zależności od jego prędkości. Niezależnie jaką energię przekażemy elektronowi (lub dowolnej innej cząstce o różnej od zera masie), jego prędkość nigdy nie przekroczy ani nie osiągnie prędkości granicznej c. (Krzywa biegnąca przez punkty pomiarowe ilustruje przewidywania stworzonej przez Einsteina szczególnej teorii względności)

Istnienie ograniczenia prędkości przyspieszanych elektronów wykazał eksperyment przeprowadzony w roku 1964 przez W. Bertozziego. Przyspieszał on elektrony, nadając im różne możliwe do zmierzenia prędkości (patrz rys. 38.2), i jednocześnie niezależnymi metodami mierzył ich energię kinetyczną. Stwierdził on, że wzrost siły działającej na poruszający się z dużą prędkością elektron powoduje zwiększenie jego energii kinetycznej do bardzo dużych wartości, chociaż prędkość nie zmienia się w sposób znaczący. Elektrony były przyspieszane do prędkości równej 0,999 999 999 95 prędkości światła — niemal tak blisko wartości c, jak tylko można — ale nie zmienia to faktu, że ich prędkość była ciągle mniejsza od granicznej prędkości c.

Prędkość graniczna c jest zdefiniowana jako równa dokładnie

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}. \tag{38.1}$$

Do tej pory w naszym podręczniku przyjmowaliśmy (poprawnie), że wartość c jest w przybliżeniu równa $3 \cdot 10^8$ m/s, ale teraz będziemy korzystać z bardziej precyzyjnego przybliżenia $2{,}998 \cdot 10^8$ m/s. Możecie wpisać tę dokładniejszą wartość do pamięci kalkulatora (jeżeli nie jest ona jeszcze tam zapisana), aby skorzystać z niej, kiedy będzie to potrzebne.

Weryfikacja postulatu stałej prędkości światła

Jeżeli prędkość światła jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, to światło emitowane przez poruszające się źródło powinno rozchodzić się z taką samą prędkością, jak światło ze źródła spoczywającego w laboratorium. Założenie to udało się potwierdzić wprost w eksperymencie wykonanym z dużą dokładnością. Rolę „źródła światła” spełniał *obojętny pion* (π^0) — nietrwała cząstka o krótkim czasie życia, która powstaje w zderzeniach cząstek w akceleratorze. Ulega ona rozpadowi na dwa fotony γ zgodnie z równaniem

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma. \tag{38.2}$$

Promieniowanie γ jest rodzajem fal elektromagnetycznych (o wielkiej częstości) i dlatego postulat stałości prędkości światła odnosi się do niego tak samo, jak do światła widzialnego.

W roku 1964 fizycy z położonego w okolicach Genewy europejskiego laboratorium fizyki cząstek CERN przeprowadzili eksperyment, w którym wytworzyli wiązkę pionów poruszających się w układzie związanym z laboratorium z prędkością $0{,}999\,75c$. Następnie zmierzyli oni prędkość promieniowania γ emitowanego przez to poruszające się szybko źródło. Stwierdzili, że prędkość światła emitowanego przez piony jest taka sama, jak w przypadku pionów spoczywających względem laboratorium.

38.3. Jak „mierzyć” zdarzenie

Zdarzenie to coś, co się dokonuje i co obserwator może wskazać, podając trzy współrzędne przestrzenne i jedną współrzędną czasową. Wśród wielu możliwych zdarzeń możemy wymienić na przykład: 1) włączenie lub wyłączenie żarówki, 2) zderzenie dwóch cząstek, 3) przejście impulsu światła przez określony punkt, 4) wybuch lub 5) pokrycie się wskazówki zegara z punktem podziałki na jego tarczy. Pewien obserwator zajmujący stałe położenie w jakimś inercjalnym układzie odniesienia mógłby na przykład przypisać jakiemuś zdarzeniu A współrzędne, które zapisano w tabeli 38.1. W teorii względności przestrzeń i czas są wzajemnie powiązane, dlatego też współrzędne te będziemy nazywać *współrzędnymi czasoprzestrzennymi*. Układ współrzędnych jest częścią układu odniesienia związanego z obserwatorem.

Tabela 38.1 Współrzędne zdarzenia A

Współrzędna	Wartość
x	3,58 m
y	1,29 m
z	0 m
t	34,5 s

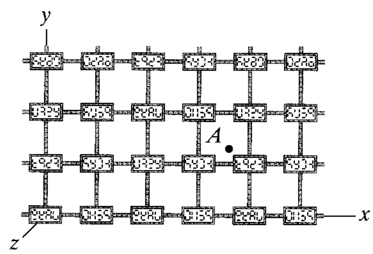
Zdarzenie może zostać zarejestrowane przez wielu obserwatorów, każdy w innym inercjalnym układzie odniesienia. Na ogół różni obserwatorzy przypiszą temu samemu zdarzeniu różne współrzędne czasoprzestrzenne. Trzeba podkreślić, że zdarzenie nie „należy" do konkretnego inercjalnego układu odniesienia. Zdarzenie to coś, co dokonuje się, i każdy w dowolnym układzie odniesienia może je zaobserwować i przypisać mu współrzędne czasoprzestrzenne.

W praktyce ustalenie współrzędnych może okazać się trudnym zadaniem. Wyobraź sobie na przykład, że o 1 km na prawo od ciebie wybucha balon, a w tej samej chwili 2 km na lewo rozbłyskuje raca — obydwa zdarzenia zachodzą o 9.00. Jednakże nie możesz dokładnie o 9.00 dowiedzieć się o tych zdarzeniach, ponieważ światło jeszcze do ciebie nie dotarło. Aby poznać rzeczywisty czas zdarzeń i stwierdzić, że obydwa wydarzyły się o godzinie 9.00, trzeba obliczyć, jak długo światło podróżowało do obserwatora i odjąć wynik od wskazania zegara w chwili jego przybycia.

W bardziej złożonych przypadkach opisana procedura jest skomplikowana i dlatego potrzebujemy prostszego rozwiązania, które wyeliminuje problemy z obliczaniem czasu podróży światła od miejsca zdarzenia do obserwatora. W tym celu wyobraźmy sobie, że cały układ inercjalny wypełnia siatka prętów mierniczych i zegarów, sztywno związana z obserwatorem. Taka konstrukcja może się wydać skomplikowana, ale oszczędza wielu nieporozumień oraz obliczeń i pozwala w sposób, który dalej opiszemy, wyznaczać współrzędne przestrzenne, współrzędną czasową oraz współrzędne czasoprzestrzenne.

1. **Współrzędne przestrzenne.** Wyobraźmy sobie, że układ współrzędnych związany z obserwatorem wypełnia gęsta trójwymiarowa sieć prętów mierniczych ułożonych tak, że każdy z trzech jej podzbiorów jest równoległy do jednej z osi układu. Pręty te pozwalają odczytać współrzędną na każdej z osi. Jeżeli zdarzeniem jest na przykład zapalenie żarówki, to obserwator chcący określić miejsce zdarzenia, odczyta po prostu trzy współrzędne położenia żarówki.
2. **Współrzędna czasowa.** Wyobrazimy sobie teraz, że w każdym punkcie, gdzie przecinają się pręty miernicze, znajduje się malutki zegar, którego wskazanie obserwator może odczytać dzięki światłu, które powstało w wyniku zdarzenia. Na rysunku 38.3 pokazano, jak można sobie wyobrażać jedną z płaszczyzn w przypominającym drabinki gimnastyczne gąszczu zegarów i prętów mierniczych.

   Sieć zegarów musi być prawidłowo zsynchronizowana. Nie wystarczy zgromadzenie zbioru identycznych zegarów, ustawienie na nich ten sam czas



Rys. 38.3. Jeden z przekrojów trójwymiarowej sieci zegarów i prętów mierniczych, umożliwiającej obserwatorowi przypisanie współrzędnych zdarzeniu takiemu, jak błysk światła w punkcie A. Współrzędne zdarzenia są w przybliżeniu równe $x = 3,7$ długości pręta, $y = 1,2$ długości pręta, $z = 0$. Współrzędna czasowa jest równa wskazaniu zegara najbliższego punktu A w chwili błysku

i przeniesienie ich w wyznaczone im położenia. Nie wiemy na przykład, czy przenoszenie zegarów nie wpłynie w jakiś sposób na szybkość, z jaką odmierzają czas. (W rzeczywistości tak właśnie będzie). Trzeba umieścić zegary we właściwych miejscach i dopiero *wtedy* je zsynchronizować.

Gdybyśmy znali sposób na przesyłanie sygnałów z nieskończoną prędkością, synchronizacja zegarów nie nastręczałaby problemów. Jednakże żaden sygnał nie ma takiej właściwości. Do przesyłania impulsów synchronizujących wykorzystamy więc światło (lub inny rodzaj promieniowania elektromagnetycznego), które w próżni rozchodzi się z największą możliwą prędkością — prędkością graniczną c.

Oto jedna z wielu metod, które może zastosować obserwator, aby zsynchronizować sieć zegarów za pomocą sygnałów świetlnych. Załóżmy, że ma on całą rzeszę pomocników, a każdy z nich obsługuje jeden zegar. Obserwator staje w punkcie, który wybrał jako początek układu współrzędnych, a następnie — kiedy zegar w początku układu współrzędnych wskazuje czas $t = 0$ — wysyła impuls światła. Gdy impuls światła mija dowolnego pomocnika, ten reguluje powierzony mu zegar tak, aby wskazywał czas $t = r/c$, gdzie r oznacza odległość zegara od początku układu współrzędnych. W ten sposób zegary zostają zsynchronizowane.

3. **Współrzędne czasoprzestrzenne.** Obserwator może teraz przypisać dowolnemu zdarzeniu współrzędne czasoprzestrzenne, patrząc, jaki czas wskazuje zegar najbliższy miejsca zdarzenia, i odczytując położenie z najbliższych prętów mierniczych. Jeżeli zachodzą dwa zdarzenia, to obserwator oblicza ich odstęp w czasie, odejmując wskazania najbliższych im zegarów, a odległość w przestrzeni oblicza, biorąc różnicę odczytów najbliższych prętów mierniczych. W ten sposób można uniknąć trudności z obliczaniem czasu podróży sygnału, który musi dotrzeć do obserwatora z miejsca każdego zdarzenia.

38.4. Względność jednoczesności

Wyobraźmy sobie, że jeden z obserwatorów (Jacek) stwierdza, że dwa niezależne zdarzenia (zdarzenie czerwone i zdarzenie niebieskie) zaszły jednocześnie. Wyobraźmy sobie też, że inny obserwator (Agata) poruszający się względem Jacka ze stałą prędkością $\vec{v}$ widzi te same zdarzenia. Czy również Agata stwierdzi, że zdarzenia były jednoczesne?

Odpowiedź brzmi, że na ogół tak nie będzie:

➤ Dwaj obserwatorzy poruszający się względem siebie na ogół nie będą zgodni co do jednoczesności zdarzeń. Jeżeli jeden z obserwatorów stwierdzi, że zdarzenia były jednoczesne, to drugi na ogół będzie innego zdania.

Nie można powiedzieć, że jeden z obserwatorów ma rację, a drugi nie. Ich obserwacje są tak samo poprawne i nie ma żadnych powodów, aby wyróżniać jeden z wyników.

Wniosek, że dwie przeciwstawne opinie dotyczące zdarzenia mogą być słuszne, jest zaskakującą konsekwencją teorii Einsteina. W rozdziale 18 omawialiśmy już inną sytuację, w której ruch wpływa na pomiar, a nie daje to sprzecznych wyników. W zjawisku Dopplera częstość fali dźwiękowej mierzona przez obserwatora zależy od względnego ruchu obserwatora i źródła. Dlatego dwaj obserwatorzy poruszający się względem siebie zmierzą różne częstości tej samej fali i obydwa pomiary będą poprawne.

Można to podsumować następująco:

Jednoczesność nie jest pojęciem absolutnym, lecz względnym i zależy od ruchu obserwatora.

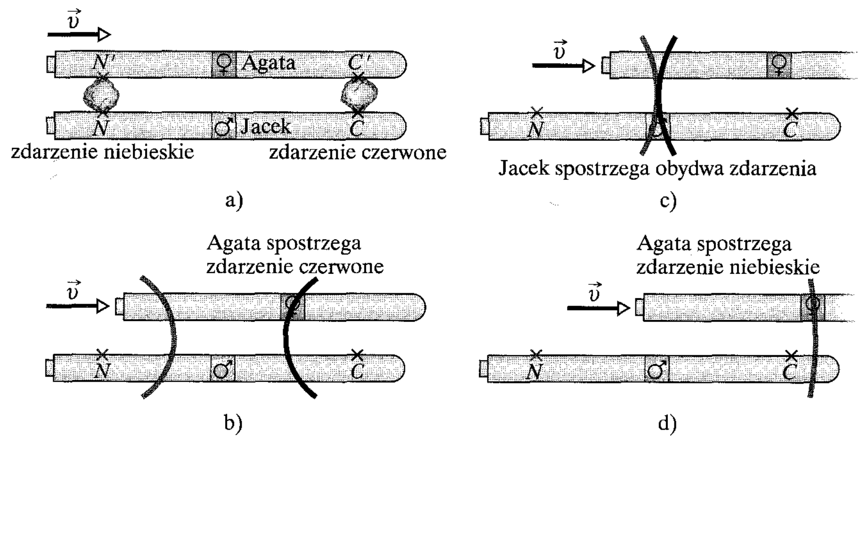
Jeżeli względna prędkość obserwatorów jest dużo mniejsza od prędkości światła, to odchylenia od jednoczesności są na tyle małe, że nie dają się zaobserwować. Tak jest w przypadku naszych codziennych obserwacji i dlatego względność jednoczesności jest dla nas czymś obcym.

Bliższe spojrzenie na jednoczesność

Wyjaśnimy teraz względność jednoczesności, opierając się na postulatach teorii względności, nie korzystając bezpośrednio z prętów mierniczych ani zegarów. Na rysunku 38.4 przedstawiono dwa statki kosmiczne (*SK*), nazwane imionami obserwatorów *SK Agata* i *SK Jacek*, które posłużą znajdującym się na ich pokładach obserwatorom Agacie i Jackowi za inercjalne układy odniesienia. Każdy z obserwatorów znajduje się dokładnie w połowie długości swojego statku. Statki oddalają się od siebie wzdłuż osi x, a względna prędkość *SK Agata* względem *SK Jacek* wynosi $\vec{v}$. Na rysunku 38.4a pokazano statki w chwili, kiedy obydwaj obserwatorzy znajdują się przez moment dokładnie naprzeciwko siebie.

Dwa duże meteoroidy uderzają w statki — niekoniecznie jednocześnie — i jeden wznieca czerwony płomień (zdarzenie czerwone), a drugi niebieski (zdarzenie niebieskie). Każde zdarzenie pozostawia trwały ślad na każdym ze statków w punktach C i C' oraz N i N'.

Wyobraźmy sobie teraz, że czoła fal świetlnych związanych z obydwoma zdarzeniami docierają do Jacka w tej samej chwili (rysunek 38.4c). Załóżmy też,



Rys. 38.4. Statki kosmiczne Agaty i Jacka oraz zdarzenia narysowane tak, jak widzi je Jacek. Statek Agaty porusza się w prawo z prędkością $\vec{v}$. a) Zdarzenie czerwone zachodzi w punktach C i C', a zdarzenie niebieskie w punktach N i N'; obydwa zdarzenia są źródłem fali świetlnej. b) Agata spostrzega czoło fali od zdarzenia czerwonego. c) Jacek jednocześnie spostrzega czoła fal od zdarzenia czerwonego i zdarzenia niebieskiego. d) Agata spostrzega czoło fali od zdarzenia niebieskiego.

że Jacek, mierząc położenie śladów na swoim statku, stwierdzi, iż w chwili, kiedy zdarzenia nastąpiły, znajdował się rzeczywiście w połowie odległości między punktami C i N. Powie on mniej więcej tak:

Jacek: Światło związane ze zdarzeniami czerwonym i niebieskim dotarło do mnie w tym samym czasie. Na podstawie śladów na moim statku stwierdziłem, że w chwili, w której ujrzałem obydwa światła, znajdowałem się dokładnie w połowie drogi między ich źródłami. Oznacza to, że zdarzenia czerwone i niebieskie nastąpiły jednocześnie.

Z rysunku 38.4 wynika, że Agata i czoło fali świetlnej od zdarzenia czerwonego poruszają się *ku* sobie. Agata i czoło fali związanej ze zdarzeniem niebieskim poruszają się w *tym samym kierunku*. Dlatego czoło fali od zdarzenia czerwonego dotrze do Agaty *wcześniej* niż czoło fali od zdarzenia niebieskiego. Usłyszymy od niej, że:

Agata: Światło związane ze zdarzeniem czerwonym dotarło do mnie wcześniej niż światło związane ze zdarzeniem niebieskim. Na postawie śladów na moim statku stwierdziłam, że ja także znajdowałam się dokładnie w połowie drogi między obydwoma źródłami światła. Oznacza to, że zdarzenia *nie* były jednoczesne; zdarzenie czerwone nastąpiło wcześniej, a niebieskie — później.

Obydwa raporty są ze sobą sprzeczne. Mimo to *obydwoje* obserwatorów mają rację.

Zauważcie, że istnieje tylko jedno czoło fali związanej z każdym zdarzeniem i to *czoło fali porusza się w obydwu układach odniesienia z taką samą prędkością* c, zgodnie z postulatem stałości prędkości światła.

Mogłoby się też zdarzyć, że meteoroidy uderzyłyby w statki tak, że obydwa zdarzenia właśnie Agacie wydałyby się jednoczesne. W takim przypadku to Jacek stwierdziłby, że obydwa zdarzenia nie są jednoczesne.

38.5. Względność czasu

Jeżeli obserwatorzy poruszający się względem siebie mierzą pewien odstęp czasu (czyli *odległość w czasie*) między dwoma zdarzeniami, to otrzymają na ogół różne wyniki. Dlaczego? Ponieważ odległość zdarzeń w przestrzeni może wpłynąć na mierzony przez obserwatorów odstęp w czasie.

➤ Odstęp czasu między zdarzeniami zależy od tego, w jakiej odległości od siebie one nastąpiły zarówno w przestrzeni, jak i w czasie. Oznacza to, że przestrzenne i czasowe odległości zdarzeń są ze sobą powiązane.

W tym paragrafie zastanowimy się, jak powiązać obydwie odległości, rozważając w tym celu pewien przykład, który jednak kryje w sobie istotne ograniczenie: *Dla jednego z dwóch obserwatorów obydwa zdarzenia będą zachodzić w tym samym miejscu.* Bardziej ogólne przykłady podamy dopiero w paragrafie 38.7.

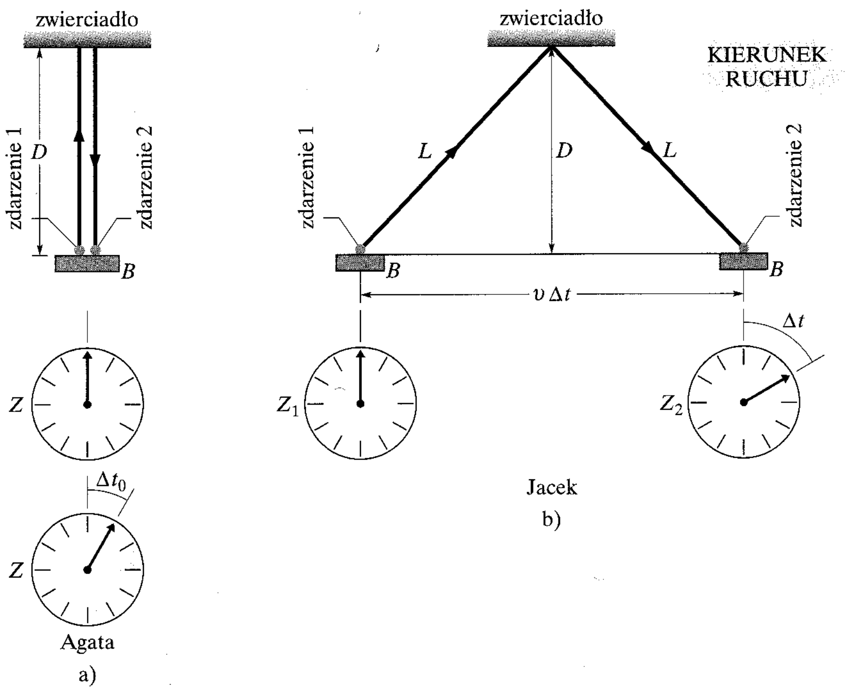
Na rysunku 38.5a przedstawiono istotę doświadczenia, które wykonuje Agata, korzystając z przyrządów umieszczonych w pociągu jadącym ze stałą prędkością $\vec{v}$ względem stacji. Impuls światła opuszcza źródło B (zdarzenie 1), porusza się pionowo w górę, odbija się pionowo w dół od zwierciadła i jest rejestrowany w miejscu, w którym znajduje się źródło (zdarzenie 2). Agata mierzy odstęp czasu Δt_0 między obydwoma zdarzeniami, który jest związany z odległością D dzielącą źródło światła od zwierciadła następującą zależnością:

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad \text{(Agata).} \tag{38.3}$$

W układzie odniesienia Agaty obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu i dlatego do pomiaru odstępu czasu między nimi wystarcza jej tylko jeden zegar Z znajdujący się tam, gdzie źródło i odbiornik. Na rysunku 38.5a zegar Z przedstawiono dwa razy — na początku i na końcu mierzonego odstępu czasu.

Zastanówmy się teraz, jak te same dwa zdarzenia opisze Jacek stojący na peronie stacji, przez którą przejeżdża pociąg. Przyrządy poruszają się, gdy światło biegnie do i od zwierciadła, dlatego też Jacek widzi drogę światła tak, jak przedstawiono ją na rysunku 38.5b. W jego układzie odniesienia obydwa zdarzenia zachodzą w innych miejscach i dlatego, aby zmierzyć odstęp czasu między nimi, Jacek potrzebuje *dwóch* zsynchronizowanych zegarów, Z_1 i Z_2, po jednym dla każdego zdarzenia. Zgodnie z postulatem Einsteina światło porusza się w układzie Jacka z taką samą prędkością c, jak w układzie Agaty. Teraz jednak światło musi pokonać drogę $2L$ między zdarzeniami 1 i 2. Odstęp czasu między zdarzeniami, który zmierzy Jacek, wyniesie więc

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad \text{(Jacek),} \tag{38.4}$$



Rys. 38.5. a) W pociągu Agata za pomocą jednego zegara Z mierzy odstęp czasu Δt_0 dzielący zdarzenia 1 i 2, które nastąpiły w pociągu. Zegar narysowany jest dwukrotnie: pierwszy raz przedstawia odczyt dla zdarzenia 1 i drugi — odczyt dla zdarzenia 2. b) Jacek, stojąc na peronie, obserwuje zdarzenia zachodzące w pociągu. Aby zmierzyć odstęp czasu między zdarzeniami 1 i 2, musi mieć dwa zsynchronizowane zegary: Z_1 w miejscu zdarzenia 1 i Z_2 w miejscu zdarzenia 2. Zmierzony przez niego odstęp czasu ma wartość Δt

gdzie

$$L = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + D^2}. \tag{38.5}$$

Korzystając z równania (38.3), możemy tę zależność przepisać w postaci

$$L = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}v\Delta t\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}c\Delta t_0\right)^2}. \tag{38.6}$$

Jeżeli z równań (38.4) i (38.6) wyeliminujemy L i rozwiążemy otrzymane równanie względem Δt, to otrzymamy

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{38.7}$$

Równanie (38.7) pozwala nam porównać zmierzony przez Jacka odstęp czasu Δt z uzyskanym przez Agatę wynikiem Δt_0. Ponieważ prędkość v musi mieć wartość mniejszą niż c, dlatego też mianownik ułamka w równaniu (38.7) jest mniejszy od jedności. Zatem wartość Δt musi być większa niż Δt_0: Jacek zmierzy *większy* odstęp czasu między zdarzeniami niż Agata. Jacek i Agata mierzyli odstęp czasu między *tymi samymi* zdarzeniami, ale ich ruch względem siebie sprawił, że uzyskali *różne* wyniki. Możemy więc wyciągnąć wniosek, że względny ruch zmienia *szybkość*, z jaką płynie czas między dwoma zdarzeniami. U podstaw tego zjawiska leży fakt, że prędkość światła jest taka sama dla obydwu obserwatorów.

Pomiary Jacka i Agaty będziemy rozróżniać dzięki następującej terminologii:

➤ Odstęp czasu zmierzony dla dwóch zdarzeń, które zaszły w tym samym miejscu w inercjalnym układzie odniesienia, będziemy nazywać odstępem czasu własnego lub krócej **czasem własnym**. Mierząc w jakimkolwiek innym inercjalnym układzie odniesienia odstęp czasu dzielący te same zdarzenia, zawsze otrzymamy większą wartość.

Widzimy, że Agata jako wynik pomiaru uzyskuje czas własny, a Jacek pewien większy odstęp czasu. (Określenie *własny* nie jest zbyt szczęśliwe, gdyż może sugerować, że inne pomiary są niewłaściwe, a więc nierzeczywiste lub błędne. Ale to nie jest prawdą). Różnicę między zmierzonym odstępem czasu a odpowiednim czasem własnym nazywamy **dylatacją czasu**. (Dylatacja znaczy tyle, co wydłużenie lub rozciągnięcie; w tym przypadku mamy do czynienia z wydłużeniem odstępu czasu).

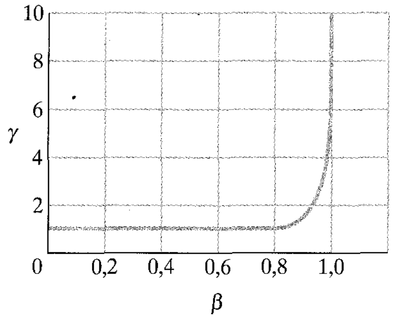
Często bezwymiarowy stosunek v/c występujący w równaniu (38.7) oznaczamy symbolem β i traktujemy jako prędkość w jednostkach c. Natomiast bezwymiarową odwrotność pierwiastka kwadratowego występującego w równaniu (38.7) oznaczamy przez γ i nazywamy **współczynnikiem Lorentza**:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{38.8}$$

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń, możemy zapisać równanie (38.7) w następującej postaci:

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0 \qquad \text{(dylatacja czasu)}. \tag{38.9}$$

Parametr β jest zawsze mniejszy od jedności, a współczynnik γ jest większy od jedności, jeżeli tylko prędkość v jest różna od zera. Wartość współczynnika Lorentza nie odbiega znacząco od 1, o ile prędkość v nie przekracza $0{,}1c$. Tak więc opis nie korzystający z teorii względności (nazywany nierelatywistycznym) daje poprawne wyniki pod warunkiem, że $v < 0{,}1c$. Dla większych prędkości v trzeba korzystać ze szczególnej teorii względności. Zgodnie z wykresem na rysunku 38.6 wartość γ zaczyna gwałtownie rosnąć, kiedy parametr β zbliża się do 1 (prędkość zbliża się do prędkości światła). Tak więc im większa będzie względna prędkość Jacka i Agaty, tym większy odstęp czasu zmierzy Jacek. Gdyby prędkość ta zrównała się z prędkością światła, odstęp czasu wydłużyłby się do „wieczności".



Rys. 38.6. Wykres zależności współczynnika Lorentza γ od parametru β ($= v/c$)

Można się zastanawiać, co powie Agata, słysząc, że Jacek zmierzył większy odstęp czasu niż ona. Wynik Jacka nie będzie jednak dla niej zaskoczeniem, ponieważ stwierdzi ona, że Jacek, wbrew temu, co sam twierdzi, nie zsynchronizował swoich zegarów Z_1 i Z_2. Pamiętajmy, że poruszający się względem siebie obserwatorzy mają różne zdania na temat jednoczesności. W tym przypadku Jacek będzie twierdził, że obydwa jego zegary wskazywały ten sam czas, kiedy zaszło zdarzenie 1. Ale według Agaty należący do Jacka zegar Z_2 podczas synchronizacji błędnie ustawiono tak, że wyprzedza on Z_1. Dlatego Agaty nie zdziwi fakt, że Jacek, który na zegarze Z_2 odczytał czas zdarzenia 2, uzyskał za duży wynik, większy od tego, który ona uzyskała.

Dwa testy dylatacji czasu

1. **Zegary mikroskopowe.** Cząstki elementarne nazywane *mionami* są nietrwałe; oznacza to, że powstały mion żyje przez krótki czas, zanim ulegnie *rozpadowi* (zamieni się w inne cząstki). *Czas życia* mionu jest odstępem czasu między dwoma zdarzeniami: 1) jego powstaniem i 2) rozpadem. Gdy miony są nieruchome i czas ich istnienia mierzymy spoczywającymi zegarami (na przykład w laboratorium), stwierdzamy, że żyją one średnio 2,2 μs. Jest to czas własny, ponieważ dla każdego mionu zdarzenia 1 i 2 zachodzą w tym samym miejscu w układzie odniesienia związanym z mionem, tzn. dokładnie tam, gdzie znajduje się mion. Ten czas własny oznaczymy przez Δt_0, a układ odniesienia, w którym został on zmierzony, możemy nazwać *układem spoczynkowym* mionu.

   Jeżeli miony będą się poruszać, na przykład lecąc przez laboratorium, to pomiary czasu ich życia dokonane za pomocą zegarów w laboratorium powinny dać większą wartość. Aby potwierdzić to przypuszczenie, zmierzono za pomocą zegara w laboratorium średni czas życia mionów poruszających się z prędkością $0{,}9994c$ względem laboratorium. Z równania (38.8) wynika, że jeżeli $\beta = 0{,}9994$, to współczynnik Lorentza ma wartość

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}9994)^2}} = 28{,}87.$$

   Równanie (38.9) pozwala obliczyć wydłużony średni czas życia:

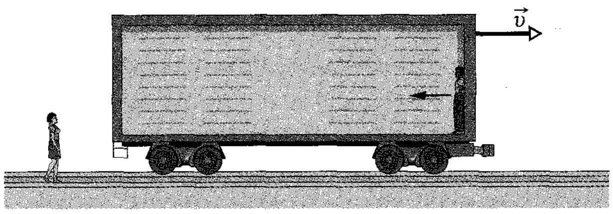
   $$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = (28{,}87)(2{,}2\ \mu s) = 63{,}51\ \mu s.$$

   Faktycznie zmierzony czas życia zgadza się z tą wartością w granicach niepewności pomiaru.

2. **Zegary makroskopowe.** W październiku 1977 roku Joseph Hafele i Richard Keating wykonali bardzo pracochłonne doświadczenie. Wysłali oni cztery przenośne zegary atomowe w dwukrotną podróż dookoła świata na pokładach samolotów pasażerskich. Zegary raz okrążyły Ziemię w jedną stronę, a drugi raz w przeciwną. Celem było „sprawdzenie teorii względności Einsteina za pomocą zegarów makroskopowych". Powiedzieliśmy właśnie, że przewidywana przez szczególną teorię względności dylatacja czasu została sprawdzona w skali mikroskopowej, ale z pewnością jej potwierdzenie za pomocą „prawdziwych" zegarów dałoby uczonym wielką satysfakcję. Pomiary makroskopowe stały się możliwe dzięki niezwykle dużej dokładności współczesnych zegarów atomowych. Hafele i Keating potwierdzili przewidywania teorii z dokładnością do 10%. (*Ogólna teoria względności* przewiduje, że siła grawitacyjna działająca na zegar również ma wpływ na jego wskazanie, a zatem i na wynik tego doświadczenia).

Kilka lat później fizycy z University of Maryland przeprowadzili podobne doświadczenie z jeszcze większą dokładnością. Dzięki kolejnym trwającym po 15 godzin lotom atomowego zegara wokół zatoki Chesapeake zdołali potwierdzić, że wartość dylatacji czasu równa jest wartości przewidywanej przez szczególną teorię względności z niepewnością mniejszą niż 1%. Obecnie, gdy zegary atomowe przewozi się z miejsca na miejsce, na przykład w celu kalibracji, zawsze trzeba uwzględnić dylatację czasu wywołaną ich ruchem.

✔**SPRAWDZIAN 1:** Wyobraź sobie, że stojąc obok torów kolejowych, widzisz wagon relatywistyczny, tzn. poruszający się z prędkością bliską c (rysunek). W jego wnętrzu dobrze wyposażony podróżny wysyła z lasera impuls światła, który biegnie od przedniej do tylnej ściany wagonu. a) Czy przeprowadzony przez ciebie pomiar prędkości impulsu da wynik większy, mniejszy, czy taki sam, jak pomiar wykonany w wagonie przez podróżnego? b) Czy zmierzony przez podróżnego czas przebycia długości wagonu przez impuls jest czasem własnym? c) Czy pomiary czasu dokonane przez podróżnego i przez ciebie są powiązane ze sobą równaniem (38.9)?



Przykład 38.1

Twój statek kosmiczny mija Ziemię z prędkością względną $0{,}999c$. Po 10 latach (według twojego czasu) zatrzymujesz się na posterunku obserwacyjnym nr 13, zawracasz i lecisz z powrotem w kierunku Ziemi z tą samą prędkością względną. Podróż powrotna zajmuje kolejne 10 lat (według twojego czasu). Jak długo trwała ta podróż według pomiarów wykonanych na Ziemi? (Pomiń wszystkie skutki przyspieszeń działających podczas hamowania, zawracania i ponownego nabierania prędkości).

ROZWIĄZANIE:

Na początek przeanalizujemy tylko tę część podróży, podczas której statek się oddalał. Zauważmy, że:

🔑 1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonywanymi w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia. Jeden z nich jest związany z Ziemią, a drugi (twój układ odniesienia) ze statkiem kosmicznym, którym lecisz.

2. W pierwszej części podróży można wskazać dwa zdarzenia: jej początek, kiedy statek mija Ziemię, i koniec, kiedy dociera on do posterunku nr 13.

3. Zmierzony przez ciebie czas podróży, równy 10 lat, jest czasem własnym Δt_0, ponieważ obydwa zdarzenia: początek i koniec podróży zachodzą w tym samym miejscu w twoim układzie odniesienia na twoim statku.

4. Pomiar odstępu czasu Δt dokonany w układzie odniesienia związanym z Ziemią — zgodnie z tym, co wynika z równania (38.9) ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$) wyrażającego dylatację czasu — musi dać wartość większą niż Δt_0.

Korzystając z równania (38.8), podstawiamy do równania (38.9) współczynnik γ:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= \frac{10\text{a}}{\sqrt{1-(0{,}9990c/c)^2}} = (22{,}37)(10\ \text{a}) = 224\ \text{a}.\end{aligned}$$

W podróży powrotnej mamy dokładnie taką samą sytuację i takie same dane liczbowe. Oznacza to, że cała podróż, która według twojego czasu zajmuje 20 lat, według czasu mierzonego na Ziemi będzie trwać

$$\Delta t_{\text{całk}} = 2 \cdot 224\ \text{a} = 448\ \text{a}. \qquad \text{(odpowiedź)}$$

Innymi słowy, ty postarzałeś się o 20 lat, podczas gdy Ziemia o 448 lat. Chociaż (o ile nam wiadomo) nie można podróżować w czasie wstecz, można podróżować w przyszłość, na przykład Ziemi, poruszając się z bardzo dużą prędkością względną, dzięki czemu wpływa się na szybkość upływu czasu.

Przykład 38.2

Średni czas życia spoczywającego *kaonu dodatniego* (K^+ — jedna z cząstek elementarnych) wynosi 0,1237 μs. Jaką drogę w układzie odniesienia związanym z laboratorium może przebyć podczas swojego życia kaon dodatni, jeżeli w chwili swojego powstania porusza się w tym układzie odniesienia z prędkością $0{,}99c$? Obliczenia wykonaj najpierw w ramach *fizyki nierelatywistycznej* dającej dobre przybliżenie dla prędkości dużo mniejszych niż c, a następnie w ramach szczególnej teorii względności dającej poprawne wyniki dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości.

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonanymi w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia — pierwszy jest związany z kaonem, a drugi z laboratorium.

2. W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: początek podróży kaonu (w chwili jego powstania) oraz koniec podróży (kiedy kaon się rozpada).

3. Droga, którą przebywa kaon między tym zdarzeniami, jest związana z jego prędkością v oraz odstępem czasu za pomocą następującego równania:

$$v = \frac{\text{droga}}{\text{odstęp czasu}}. \qquad (38.10)$$

Mając te wiadomości, obliczenia wykonamy najpierw w przybliżeniu nierelatywistycznym, a następnie skorzystamy ze szczególnej teorii względności.

Opis nierelatywistyczny. W przybliżeniu nierelatywistycznym, jak wiemy: pomiary drogi i odstępu czasu dadzą ten sam wynik (równanie (38.10)) niezależnie od tego, czy przeprowadzimy je w układzie odniesienia związanym z kaonem, czy w układzie laboratoryjnym. Możemy więc nie zważać na to, w jakim układzie wykonujemy pomiary. Aby w przybliżeniu nierelatywistycznym obliczyć drogę d_{nierel} kaonu, zapiszemy najpierw równanie (38.10) w postaci

$$d_{\text{nierel}} = v\Delta t, \qquad (38.11)$$

gdzie Δt oznacza odstęp czasu między dwoma zdarzeniami w którymkolwiek z dwóch układów odniesienia. Podstawiając do równania (38.11) $v = 0{,}99c$ oraz $\Delta t = 0{,}1237$ μs, otrzymujemy

$$\begin{aligned}d_{\text{nierel}} &= (0{,}99c)\Delta t \\ &= (0{,}99)(2{,}998 \cdot 10^8\ \text{m/s})(0{,}1237 \cdot 10^{-6}\ \text{s}) \\ &= 36{,}7\ \text{m}. \qquad \text{(odpowiedź)}\end{aligned}$$

Taką odległość pokonałby kaon, gdyby fizyka nierelatywistyczna obowiązywała dla prędkości bliskich c.

Szczególna teoria względności. W ramach szczególnej teorii względności musimy spełnić następujący warunek: odległość i odstęp czasu w równaniu (38.10) muszą być zmierzone w *tym samym* układzie odniesienia — zwłaszcza wtedy, kiedy prędkość jest bliska c, jak w naszym przypadku. Aby obliczyć drogę d_{rel} kaonu, *zmierzoną w układzie odniesienia związanym z laboratorium*, zapiszemy równanie (38.10) w postaci

$$d_{\text{rel}} = v\Delta t, \qquad (38.12)$$

gdzie przez Δt oznaczymy odstęp czasu między dwoma zdarzeniami, które zostały *zmierzone w układzie odniesienia związanym z laboratorium.*

Zanim z równania (38.12) obliczymy drogę kaonu d_{rel}, musimy wyznaczyć odstęp czasu Δt, korzystając z następującego faktu: odstęp czasu równy 0,1237 μs jest czasem własnym, ponieważ dwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w układzie związanym z kaonem — dokładnie tam, gdzie znajduje się kaon. Oznaczmy czas własny przez Δt_0. Możemy teraz, korzystając z równania (38.9) na dylatację czasu ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$), obliczyć odstęp czasu mierzony w układzie związanym z laboratorium. Podstawiając współczynnik γ z równania (38.8), otrzymamy

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{0{,}1237 \cdot 10^{-6}\ \text{s}}{\sqrt{1-(0{,}99c/c)^2}} = 8{,}769 \cdot 10^{-7}\ \text{s}.$$

Uzyskana wartość jest około siedem razy większa niż własny czas życia kaonu. Oznacza to, że kaon żyje siedem razy dłużej w układzie odniesienia związanym z laboratorium niż w swoim układzie spoczynkowym — czas życia kaonu ulega dylatacji. Możemy teraz, korzystając z równania (38.12), obliczyć drogę kaonu d_{rel} w układzie związanym z laboratorium

$$\begin{aligned} d_{\text{rel}} &= v\Delta t = (0{,}99c)\Delta t \\ &= (0{,}99)(2{,}998 \cdot 10^8\ \text{m/s})(8{,}769 \cdot 10^{-7}\ \text{s}) \\ &= 260\ \text{m}. \qquad \text{(odpowiedź)} \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest około siedem razy większy niż droga obliczona w przybliżeniu nierelatywistycznym d_{nierel}. Doświadczenia takie jak to, które przed chwilą opisaliśmy, będące testami szczególnej teorii względności, stały się codziennością już kilkadziesiąt lat temu. We wszelkich urządzeniach badawczych lub medycznych, w których cząstki są przyspieszane do wielkich prędkości, należy uwzględniać efekty relatywistyczne.

38.6. Względność długości

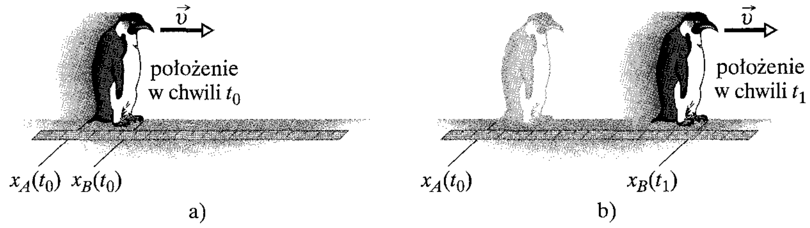
Jeżeli chcesz zmierzyć długość spoczywającego względem ciebie pręta, to możesz bez pośpiechu odczytać na odpowiednio długiej spoczywającej miarce położenie jego końców, a następnie odjąć od siebie odczytane wartości. Jeżeli jednak pręt porusza się, to współrzędne jego końców musisz odczytać *jednocześnie* (w twoim układzie odniesienia), gdyż w przeciwnym razie nie będzie to pomiar długości. Na rysunku 38.7 wskazano trudności, jakie napotkamy, gdy chcąc zmierzyć grubość poruszającego się pingwina, będziemy notować położenie jego pleców i brzuszka w różnym czasie. Pojęcie jednoczesności jest względne, a wiąże się z pomiarami długości, zatem i długość musi być wielkością względną. I tak właśnie jest.

Niech L_0 oznacza długość pręta, którą mierzymy, kiedy pręt spoczywa (znajdujemy się w układzie odniesienia pręta). Jeżeli pręt porusza się względem nas z prędkością v skierowaną *równolegle do niego*, to wtedy, dokonując jednoczesnego pomiaru położenia końców, uzyskamy długość L daną wzorem

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \text{(skrócenie długości).} \qquad (38.13)$$

Współczynnik Lorentza γ jest zawsze większy od jedności, jeżeli tylko prędkość jest różna od zera, dlatego też L ma wartość mniejszą niż L_0. Ruch względny powoduje *skrócenie długości*. Wartość γ wzrasta wraz z prędkością v, zatem skrócenie długości staje się tym wyraźniejsze, im prędkość v jest bliższa wartości c.

Długość obiektu L_0 mierzoną w jego układzie spoczynkowym nazywamy **długością własną** lub **długością spoczynkową**. Pomiary długości przeprowadzone w innym układzie odniesienia, który porusza się względem obiektu równolegle do mierzonej długości, dają zawsze wynik mniejszy niż długość własna.



Rys. 38.7. Jeżeli chcesz zmierzyć grubość poruszającego się pingwina, musisz jednocześnie — jak na rysunku (a), a nie (b) — wyznaczyć położenie jego pleców i brzucha (w swoim układzie odniesienia)

Uważaj jednak: Skrócenie długości zachodzi tylko w kierunku ruchu względnego. Poza tym mierzona długość nie musi być wcale długością jakiegoś ciała, jak pręt czy obręcz; może to być odległość między dwoma ciałami spoczywającymi w tym samym układzie odniesienia, na przykład Słońcem i pobliską gwiazdą (które przynajmniej w przybliżeniu spoczywają względem siebie).

Czy poruszające się ciała *rzeczywiście* się kurczą? Rzeczywistość jest wynikiem obserwacji i pomiarów; gdy wyniki są zawsze spójne i nie można znaleźć błędów, wtedy to, co obserwujemy i mierzymy, jest rzeczywistością. W tym sensie ciała rzeczywiście się kurczą. Jednakże bardziej ściśle należy powiedzieć, że *według pomiarów* ciała się kurczą — ruch wpływa na pomiary, a tym samym na rzeczywistość.

Co powie obserwator poruszający się wraz z prętem, kiedy usłyszy, że nasz pomiar długości dał mniejszą wartość? Według niego błąd polega na tym, że położenia obydwu końców pręta nie zostały wyznaczone jednocześnie. (Pamiętajmy, że obserwatorzy poruszający się względem siebie mają różne zdanie na temat jednoczesności). Według obserwatora związanego z prętem najpierw zmierzyliśmy położenie przedniego końca pręta, a nieco później tylnego i dlatego otrzymaliśmy mniejszą jego długość.

Wyprowadzenie równania (38.13)

Skrócenie długości jest bezpośrednią konsekwencją dylatacji czasu. Wróćmy raz jeszcze do naszej pary obserwatorów. Tym razem Agata, która przejeżdża pociągiem przez stację, i stojący na peronie Jacek postanawiają zmierzyć długość peronu. Jacek, który korzysta z taśmy mierniczej, stwierdza, że długość peronu wynosi L_0, co jest długością własną, ponieważ peron spoczywa względem niego. Jacek stwierdza też, że jadąca pociągiem Agata mija peron w czasie $\Delta t = L_0/v$, gdzie v oznacza prędkość pociągu. Mamy więc

$$L_0 = v\Delta t \quad \text{(Jacek).} \tag{38.44}$$

Odstęp czasu Δt nie jest czasem własnym, ponieważ dwa zdarzenia, które go wyznaczają („Agata mija początek peronu" i „Agata mija koniec peronu") nie zachodzą w tym samym miejscu i Jacek musi użyć dwóch zsynchronizowanych zegarów, aby zmierzyć Δt.

Z punktu widzenia Agaty peron porusza się obok niej. Stwierdza ona, że dwa zdarzenia, które mierzy Jacek, w jej układzie odniesienia zachodzą *w tym samym miejscu*. Może ona je zmierzyć, korzystając tylko z jednego, spoczywającego zegara, i dlatego zmierzony przez nią odstęp czasu Δt_0 jest czasem własnym. Według Agaty długość peronu L można obliczyć ze wzoru

$$L = v\Delta t_0 \quad \text{(Agata).} \tag{38.15}$$

Dzieląc równanie (38.15) przez (38.14) i korzystając z równania (38.9) opisującego dylatację czasu, otrzymamy

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\Delta t_0}{v\Delta t} = \frac{1}{\gamma},$$

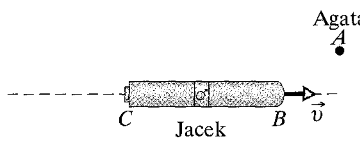
czyli

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \tag{38.16}$$

Jest to dokładnie równanie (38.13), które wyraża skrócenie długości.

Przykład 38.3

Statek kosmiczny Jacka (o długości własnej $L_0 = 230$ m) mija ze stałą prędkością względną v Agatę, która znajduje się w punkcie A (rysunek 38.8). Agata stwierdza, że statek Jacka mija ją (od punktu B do punktu C) w czasie 3,57 μs. Ile wynosi względna prędkość v Agaty i statku kosmicznego (w jednostkach c)?



Rys. 38.8. Przykład 38.3. W punkcie A Agata mierzy czas, w jakim mija ją statek kosmiczny

ROZWIĄZANIE:

Załóżmy że wartość prędkości v jest bliska prędkości światła c. Zauważmy teraz, że:

1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonanymi w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia, pierwszym związanym z Agatą oraz z drugim, związanym z Jackiem i z jego statkiem kosmicznym.

2. W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: pierwsze — Agatę mija punkt B i drugie — Agatę mija punkt C.

3. W każdym z układów odniesienia drugi układ odniesienia porusza się z prędkością v i w czasie między zdarzeniami pokonuje pewną odległość:

$$v = \frac{\text{odległość}}{\text{odstęp czasu}}. \tag{38.17}$$

Prędkość v z założenia jest bliska prędkości światła, dlatego też musimy pamiętać, aby odległość i odstęp czasu pojawiający się w równaniu (38.17) były zmierzone w *tym samym* układzie odniesienia.

Mamy swobodę wyboru układu odniesienia, w którym chcemy wykonać pomiary. Wiemy, że odstęp czasu dzielący zdarzenia, zmierzony w układzie odniesienia Agaty wynosi 3,57 μs, zatem skorzystamy z odległości L między zdarzeniami, zmierzonej w tym układzie odniesienia. Równanie (38.17) można zapisać w postaci

$$v = \frac{L}{\Delta t}. \tag{38.18}$$

Nie znamy wartości L, ale możemy ją powiązać z podaną wartością L_0. Zauważmy, że odległość między dwoma zdarzeniami zmierzona w układzie odniesienia Jacka jest długością własną jego statku L_0. Dlatego odległość L mierzona w układzie odniesienia Agaty musi być mniejsza niż L_0, co wynika z równania (38.13) ($L = L_0/\gamma$), które wyraża skrócenie długości. Podstawiając L_0/γ jako wartość L do równania (38.18), a następnie podstawiając współczynnik γ dany równaniem (38.8), otrzymujemy

$$v = \frac{L_0/\gamma}{\Delta t} = \frac{L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}{\Delta t}.$$

Rozwiązując to równanie względem v, dochodzimy do poszukiwanego wyniku

$$\begin{aligned} v &= \frac{L_0 c}{\sqrt{(c\Delta t)^2 + L_0^2}} \\ &= \frac{(230\ \text{m})c}{\sqrt{(2{,}998\cdot 10^8\ \text{m/s})^2(3{,}57\cdot 10^{-6}\ \text{s})^2 + (230\ \text{m})^2}} \\ &= 0{,}21c. \qquad \text{(odpowiedź)} \end{aligned}$$

Widzimy więc, że względna prędkość Agaty i statku jest równa 21% prędkości światła. Zauważ, że w tym przypadku liczy się tylko względny ruch Agaty i Jacka; to, czy któryś z ich układów znajduje się w spoczynku względem powiedzmy stacji kosmicznej, nie ma znaczenia. Rysunek 38.8 wykonano tak, jakby Agata znajdowała się w stanie spoczynku, ale równie dobrze można by przyjąć, że to ona się porusza. Nie miałoby to żadnego wpływu na uzyskany wynik.

SPRAWDZIAN 2: W omówionym przykładzie Agata mierzy czas, w którym mija ją statek. Załóżmy, że Jacek wykonuje ten sam pomiar. a) Który z pomiarów (może obydwa albo żaden) jest czasem własnym i b) w którym z pomiarów otrzymamy mniejszą wartość?

38.7. Transformacja Lorentza

Na rysunku 38.9 przedstawiono inercjalny układ odniesienia S' poruszający się z prędkością v względem układu S, w zgodnym dodatnim kierunku ich osi poziomych (oznaczonych x i x'). Obserwator w układzie S przypisuje pewnemu zdarzeniu współrzędne czasoprzestrzenne x, y, z, t, a obserwator w układzie S' przypisuje temu samemu zdarzeniu współrzędne x', y', z', t'. Jaka jest wzajemna zależność między obydwoma zestawami liczb?

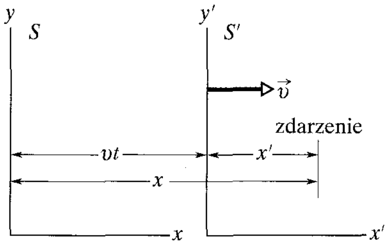
Stwierdzamy od razu (chociaż wymaga to dowodu), że ruch nie ma wpływu na współrzędne y i z odczytywane z osi prostopadłych do jego kierunku, czyli

$y = y'$ i $z = z'$. Nasze zainteresowanie ogranicza się więc do zależności wiążących x i x' oraz t i t'.

Transformacja Galileusza

Przed opublikowaniem przez Einsteina jego szczególnej teorii względności przyjmowano, że cztery interesujące nas współrzędne są powiązane ze sobą transformacją Galileusza:

$$x' = x - vt, \qquad t' = t \qquad \text{(transformacja Galileusza; prawdziwa dla małych prędkości).} \qquad (38.19)$$



Rys. 38.9. Dwa inercjalne układy odniesienia: układ S' porusza się z prędkością $\vec{v}$ względem układu S

(Równania te zapisaliśmy, zakładając, że $t = t' = 0$ w chwili, kiedy początki układów współrzędnych S i S' się pokrywają). Pierwsze równanie można sprawdzić, korzystając z rysunku 38.9. Drugie równanie oznacza po prostu, że w obydwu układach odniesienia czas płynie w tym samym tempie. Dla poprzedników Einsteina było to tak oczywiste, że nawet o tym nie wspominano. Gdy prędkość v jest mała w porównaniu z c, równania (38.19) są dobrym przybliżeniem.

Transformacja Lorentza

Podamy bez dowodu, że równanie transformacji obowiązujące dla wszystkich prędkości, aż do prędkości światła, można wyprowadzić z postulatów teorii względności. Równania te są nazywane po prostu **transformacją Lorentza**[1].

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt),\\ y' &= y,\\ z' &= z,\\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \qquad \text{(transformacja Lorentza; prawdziwa dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości).} \qquad (38.20)$$

(Równania te zapisaliśmy, zakładając, że $t = t' = 0$ w chwili, kiedy początki układów współrzędnych S i S' się pokrywają). Zwróćcie uwagę, że współrzędna przestrzenna x i współrzędna czasowa t występują obie w pierwszym i ostatnim równaniu. To powiązanie przestrzeni i czasu było głównym przesłaniem teorii Einsteina — przesłaniem, które długo odrzucało wielu współczesnych mu uczonych.

Rzecz jasna wymaga się, aby równania relatywistyczne przechodziły w dobrze nam znane równania nierelatywistyczne, jeżeli prędkość c dąży do nieskończoności. Oznacza to, że gdyby prędkość światła była nieskończona, *wszystkie* inne prędkości byłyby „małe" i równania nierelatywistyczne obowiązywałyby zawsze. Jeżeli w równaniach (38.20) przyjęlibyśmy, że $c \to \infty$, to $\gamma \to 1$ i — zgodnie z naszymi oczekiwaniami — równania te przeszłyby w transformację Galileusza (38.19). Byłoby dobrze, gdybyście sami się o tym przekonali.

[1]Możecie się dziwić, dlaczego równania te nie są nazywane **transformacją Einsteina** (a także dlaczego współczynnik γ nie nazywa się **współczynnikiem Einsteina**). Jest tak, ponieważ wybitny holenderski fizyk H. A. Lorentz wyprowadził te równania przed Einsteinem, ale jak sam przyznał, nie uczynił tego śmiałego kroku i nie zinterpretował ich jako równań opisujących prawdziwą naturę przestrzeni i czasu. Interpretacji tej, będącej istotą teorii względności, dokonał Einstein.

Równania (38.20) zapisano w postaci, która jest wygodna, jeżeli znamy x i t, a chcemy wyznaczyć x' i t'. Może się zdarzyć, że chcemy dokonać przekształceń w drugą stronę. W takiej sytuacji wystarczy, że rozwiążemy równania (38.20) względem x i t, co prowadzi do układu

$$x = \gamma(x' + vt') \quad \text{oraz} \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \tag{38.21}$$

Porównanie obydwu układów pozwala dostrzec, że wychodząc z jednego zestawu równań (38.20) lub (38.21), można otrzymać drugi, zamieniając zmienne primowane na nieprimowane (i na odwrót) oraz zmieniając na przeciwny znak prędkości względnej v.

Równania (38.20) i (38.21) wiążą ze sobą współrzędne jednego zdarzenia widzianego przez dwóch obserwatorów. Czasami jednak chcemy znać nie współrzędne pojedynczego zdarzenia, ale różnicę współrzędnych dla pary zdarzeń. Oznaczmy nasze zdarzenia, nadając im numery 1 i 2. Może nas interesować związek wielkości

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{i} \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

mierzonych przez obserwatora w układzie S, oraz

$$\Delta x' = x_2' - x_1' \quad \text{i} \quad \Delta t' = t_2' - t_1',$$

mierzonych przez obserwatora w układzie S'.

W tabeli 38.2 podano równania Lorentza w postaci różnicowej, nadającej się do analizy par zdarzeń. Równania te otrzymano bezpośrednio dzięki podstawieniu różnic (takich jak Δx i $\Delta x'$) zamiast czterech zmiennych występujących w układach (38.20) i (38.21).

Zachowaj ostrożność: Wyznaczając wartości wspomnianych różnic, trzeba postępować spójnie i nie pomylić wartości dla pierwszego i drugiego zdarzenia. Jeżeli na przykład Δx jest wielkością ujemną, to nie wolno zapomnieć o znaku minus.

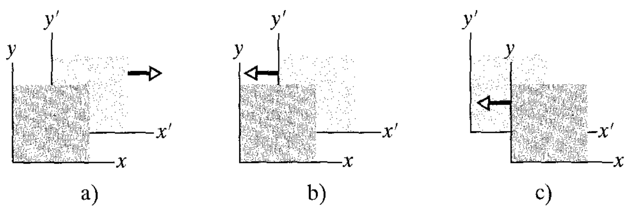
Tabela 38.2. Transformacja Lorentza dla pary zdarzeń

1. $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$	1'. $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$
2. $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)$	2'. $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Układ S' porusza się z prędkością v względem układu S.

✔SPRAWDZIAN 3: Na rysunku przedstawiono trzy sytuacje, w których dwa układy odniesienia — niebieski i zielony, poruszają się względem siebie we wspólnym kierunku swoich osi x i x', co zaznaczono za pomocą wektora prędkości jednego z układów. Jaki znak prędkości v trzeba uwzględnić w równaniach z tabeli 38.2 dla każdego z tych przypadków, jeżeli założymy, że niebieski układ odniesienia jest w stanie spoczynku?



a) b) c)

38.8. Kilka wniosków z równań Lorentza

Obecnie skorzystamy z równań zapisanych w tabeli 38.2, aby potwierdzić pewne wnioski, do których doszliśmy wcześniej, wychodząc bezpośrednio z postulatów teorii względności.

Jednoczesność

Przyjrzyjmy się równaniu 2 z tabeli 38.2:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right). \tag{38.22}$$

Jeżeli dwa zdarzenia zachodzą w różnych miejscach w układzie odniesienia S' (rys. 38.9), to wartość $\Delta x'$ w tym równaniu jest różna od zera. Wynika stąd, że nawet wtedy, kiedy zdarzenia są jednoczesne w układzie S' (czyli $\Delta t' = 0$), nie będą one jednoczesne w układzie S. (Jest to zgodne z naszym wnioskiem z paragrafu 38.4). Odstęp czasu między zdarzeniami w układzie odniesienia S będzie równy

$$\Delta t = \gamma\frac{v\Delta x'}{c^2} \qquad \text{(zdarzenia jednoczesne w } S'\text{)}.$$

Dylatacja czasu

Załóżmy teraz, że dwa zdarzenia w układzie S' zachodzą w tym samym miejscu ($\Delta x' = 0$), ale w różnym czasie ($\Delta t' \neq 0$). Równanie (38.22) redukuje się więc do postaci

$$\Delta t = \gamma\Delta t' \qquad \text{(zdarzenia w tym samym miejscu w } S'\text{)}. \tag{38.23}$$

Otrzymaliśmy więc potwierdzenie dylatacji czasu. Obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu w układzie S', zatem odstęp czasu między nimi można zmierzyć za pomocą jednego zegara, znajdującego się w miejscu zdarzenia. Zmierzony odstęp czasu jest więc czasem własnym, który oznaczamy Δt_0. Równanie (38.23) przybiera więc postać

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0 \qquad \text{(dylatacja czasu)},$$

która jest identyczna z równaniem (38.9) opisującym dylatację czasu.

Skrócenie długości

Przyjrzyjmy się teraz równaniu 1′ z tabeli 38.2:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t). \tag{38.24}$$

Jeżeli pręt jest równoległy do osi x i x' zaznaczonych na rysunku 38.9 i spoczywa w układzie odniesienia S', to obserwator w układzie S' może zmierzyć jego długość bez pośpiechu. Może on to zrobić, obliczając różnicę współrzędnych końców pręta. Uzyskana wartość $\Delta x'$ jest długością własną (spoczynkową) L_0 tego pręta.

Załóżmy teraz, że pręt porusza się w układzie odniesienia S. Oznacza to, że różnicę współrzędnych jego końców Δx będzie można uznać za długość pręta L w układzie S tylko wtedy, kiedy odpowiednie współrzędne będą zmierzone *jednocześnie* — czyli $\Delta t = 0$. Jeżeli podstawimy do równania (38.24) $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ i $\Delta t = 0$, to otrzymamy

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{(skrócenie długości)}, \tag{38.25}$$

czyli dokładnie równanie (38.13) wyrażające skrócenie długości.

Przykład 38.4

Statek kosmiczny został wysłany z Ziemi do bazy na planecie P1407, której księżyc jest miejscem stacjonowania oddziałów wrogo nastawionych Reptulian. Statek lecący po linii prostej najpierw mija planetę, a następnie jej księżyc. W tym czasie załoga statku dostrzega emisję silnego promieniowania mikrofalowego ze stacji Reptulian na księżycu, a 1,1 s później eksplozję w bazie Ziemian na planecie. Według pomiarów w układzie odniesienia związanym ze statkiem obie placówki dzieli odległość $4 \cdot 10^8$ m. Nie ulega wątpliwości, że Reptulianie zaatakowali Ziemian i załoga statku przygotowuje się do starcia z nimi.

a) Statek porusza się względem planety i jej księżyca z prędkością $0{,}98c$. Jaką odległość i odstęp czasu między emisją promieniowania i wybuchem zmierzy obserwator w układzie związanym z planetą i jej księżycem (jak opiszą zdarzenia Ziemianie z bazy na planecie i Reptulianie na Księżycu)?

ROZWIĄZANIE:

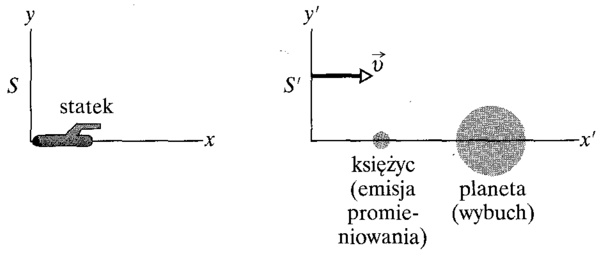
Zauważmy, że:

1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami wykonanymi w dwóch inercjalnych układach odniesienia: w pierwszym związanym z planetą i księżycem oraz w drugim, związanym ze statkiem kosmicznym.

2. W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: emisję promieniowania i wybuch.

3. Musimy dokonać transformacji posiadanych danych o odległości i odstępie czasu między zdarzeniami z układu związanego ze statkiem kosmicznym do układu związanego z planetą i jej księżycem.

Zanim dokonamy transformacji, musimy zadbać o wprowadzenie odpowiednich oznaczeń. Zaczniemy od naszkicowania sytuacji, jak na rysunku 38.10. Przyjęliśmy tu, że związany ze statkiem układ S spoczywa, a układ planeta–księżyc S' porusza się z dodatnią prędkością (w prawo). (Nasz wybór jest oczywiście dowolny; równie dobrze mogliśmy przyjąć, że spoczywa układ planeta–księżyc. W takim przypadku zaznaczylibyśmy na rysunku 38.10 wektor $\vec{v}$ jako prędkość układu S skierowaną w lewo. Wartość v byłaby ujemna, ale wynik obliczeń nie uległby zmianie).



Rys. 38.10. Przykład 38.4. Planeta i jej księżyc związane z układem odniesienia S', poruszają się w prawo z prędkością v względem układu odniesienia S związanego ze statkiem kosmicznym

Niech wskaźniki „w" i „e" odnoszą się do zdarzenia wybuchu i emisji promieniowania. Możemy teraz zapisać posiadane przez nas dane, uzyskane w układzie S (statek):

$$\Delta x = x_w - x_e = +4 \cdot 10^8 \text{ m}$$

oraz

$$\Delta t = t_w - t_e = +1 \text{ s}.$$

W naszym przypadku odległość Δx jest dodatnia, ponieważ na rysunku 38.10 współrzędna wybuchu x_w jest większa niż współrzędna emisji x_e. Odstęp czasu Δt jest także dodatni, bo wartość t_w jest większa niż t_e (wybuch zaobserwowano później niż emisję promieniowania).

Szukamy odległości $\Delta x'$ i odstępu czasu $\Delta t'$, które możemy wyznaczyć, dokonując transformacji danych z układu S do układu S' związanego z planetą i księżycem. Zajmujemy się parą zdarzeń, dlatego też skorzystamy z równań podanych w tabeli 38.2 (równania 1′ i 2′):

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \tag{38.26}$$

oraz

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right). \tag{38.27}$$

W naszym przypadku $v = +0{,}98c$, co odpowiada współczynnikowi Lorentza równemu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}98c/c)^2}} = 5{,}0252.$$

Równanie (38.26) pozwala wyznaczyć odległość

$$\Delta x' = (5{,}0252)[4 \cdot 10^8\,\text{m} - (+0{,}98)(2{,}998 \cdot 10^8\,\text{m/s})(1{,}1)]$$

$$= 3{,}86 \cdot 10^8\,\text{m}, \qquad \text{(odpowiedź)}$$

a równanie (38.27) — odstęp czasu

$$\Delta t' = (5{,}0252)\left[(1{,}1\,\text{s}) - \frac{(+0{,}98)(2{,}998 \cdot 10^8\,\text{m/s})(4 \cdot 10^8)}{(2{,}998 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2}\right]$$

$$= -1{,}04\,\text{s}. \qquad \text{(odpowiedź)}$$

b) Jakie znaczenie ma znak minus w obliczonym przez nas odstępie czasu $\Delta t'$?

ROZWIĄZANIE:

Ważne jest, aby konsekwentnie stosować notację przyjętą w punkcie (a). Przypomnijmy sobie, że na samym początku zdefiniowaliśmy odstęp czasu między emisją promieniowania a wybuchem jako: $\Delta t = t_w - t_e = +1{,}1$ s. Aby zachować zgodność, musimy przyjąć, że odstęp czasu $\Delta t'$ jest równy $t'_w - t'_e$. Oznacza to, że otrzymaliśmy wynik

$$\Delta t' = t'_w - t'_e = -1{,}04\ \text{s}.$$

Znak minus mówi nam, że $t'_e > t'_w$, a więc w układzie odniesienia planeta–księżyc emisja promieniowanie nastąpiła 1,04 s *po* wybuchu na planecie, a nie o 1,1 s *przed* wybuchem, jak to widziała załoga statku kosmicznego.

c) Czy to emisja promieniowania spowodowała wybuch na planecie, czy może odwrotnie?

ROZWIĄZANIE:

Kolejność zdarzeń zmierzona w układzie odniesienia planeta–księżyc jest inna niż w układzie odniesienia związanym ze statkiem. Zauważmy, że jeżeli w pewnym układzie ma istnieć związek przyczynowy między dwoma zdarzeniami, to musimy zdążyć z przesłaniem informacji o zdarzeniu z miejsca pierwszego zdarzenia do miejsca drugiego zdarzenia. Sprawdźmy, z jaką prędkością należałoby przesyłać informacje w obydwu układach odniesienia. W układzie związanym ze statkiem wymagana prędkość wynosi

$$v_{\text{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 10^8\ \text{m}}{1{,}1\ \text{s}} = 3{,}64 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

i jest wartością niedozwoloną, większą od prędkości światła. W układzie odniesienia planeta–księżyc otrzymamy także niedozwoloną prędkość $3{,}7 \cdot 10^8$ m/s. Oznacza to, że żadne z tych zdarzeń nie mogło być przyczyną drugiego, a więc są to zdarzenia *niezależne*. Załoga statku kosmicznego nie powinna więc decydować się na konfrontację z Reptulianami.

38.9. Względność prędkości

Skorzystamy teraz z transformacji Lorentza, aby przekonać się, jakie prędkości zmierzą obserwatorzy badający ruch tej samej cząstki i znajdujący się w dwóch inercjalnych układach odniesienia S i S'.

Załóżmy, że cząstka poruszająca się równolegle do osi x i x' (rys. 38.11) wysyła dwa sygnały. Każdy obserwator mierzy odległość przestrzenną i odstęp czasu między tymi zdarzeniami. Wyniki czterech pomiarów wiążą równania 1 i 2 z tabeli 38.2:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$$

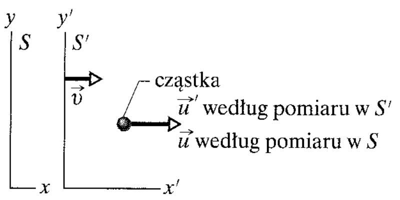
oraz

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right).$$

Dzieląc pierwsze z tych równań przez drugie, otrzymamy

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}.$$

Jeżeli licznik i mianownik po prawej stronie równania podzielimy przez $\Delta t'$, to



Rys. 38.11. Układ odniesienia S' porusza się z prędkością $\vec{v}$ względem układu odniesienia S. Cząstka ma prędkość $\vec{u}'$ względem układu odniesienia S' oraz prędkość $\vec{u}$ względem układu odniesienia S

stwierdzimy, że

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}.$$

W granicy $\Delta x/\Delta t$ jest prędkością u cząstki w układzie odniesienia S, a $\Delta x'/\Delta t'$ jest prędkością u' tej samej cząstki w układzie S'. Otrzymane równanie możemy więc zapisać w postaci

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \text{(relatywistyczna transformacja prędkości)} \tag{38.28}$$

— jest to relatywistyczna transformacja prędkości. Równanie to redukuje się do transformacji nierelatywistycznej (Galileusza)

$$u = u' + v \quad \text{(nierelatywistyczna transformacja prędkości),} \tag{38.29}$$

gdy prędkość c dąży do nieskończoności: $c \to \infty$. Innymi słowy równanie (38.28) jest słuszne dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości, podczas gdy równanie (38.29) jest tylko przybliżeniem dla prędkości dużo mniejszych niż c.

38.10. Zjawisko Dopplera dla światła

W paragrafie 18.8 omawialiśmy zjawisko Dopplera (zmianę obserwowanej częstości) dla fal dźwiękowych rozchodzących się w powietrzu. W przypadku fal tego typu zjawisko Dopplera zależy od dwóch prędkości, z jakimi poruszają się źródło i detektor względem powietrza. (Powietrze jest ośrodkiem, w którym fale się rozchodzą).

Sytuacja wygląda inaczej w przypadku światła, które (tak jak wszystkie fale elektromagnetyczne) nie wymaga istnienia jakiegoś ośrodka i może rozchodzić się nawet w próżni. W przypadku zjawiska Dopplera dla światła mamy tylko jedną prędkość — względną prędkość źródła i detektora, którą mierzymy w jednym ze związanych z nimi układów odniesienia. Niech ν_0 oznacza **„częstość własną"** źródła, czyli częstość, którą mierzy obserwator w układzie odniesienia źródła. Niech ν oznacza częstość mierzoną przez obserwatora poruszającego się z prędkością $\vec{v}$ względem źródła. Jeżeli źródło i detektor oddalają się od siebie z prędkością $\vec{v}$ skierowaną dokładnie wzdłuż łączącej je linii, to mamy

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{(źródło i detektor oddalają się od siebie),} \tag{38.30}$$

gdzie $\beta = v/c$. Jeżeli źródło i detektor zbliżają się do siebie z prędkością $\vec{v}$ skierowaną wzdłuż łączącej je linii, to należy zmienić znaki przed obydwoma współczynnikami β w równaniu (38.30).

Zjawisko Dopplera dla małych prędkości względnych

W przypadku małych prędkości ($\beta \ll 1$) prawą stronę równania (38.30) można rozwinąć w szereg potęgowy względem β i ograniczyć się do wyrazów drugiego rzędu. Otrzymamy następującą zależność:

$$\nu = \nu_0(1 - \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2) \quad \text{(źródło i detektor oddalają się od siebie, } \beta \ll 1\text{).} \quad (38.31)$$

Odpowiednie równanie, opisujące zjawisko Dopplera dla fal dźwiękowych (i innych poza świetlnymi) w przybliżeniu małych prędkości, ma pierwsze dwa wyrazy identyczne, ale inny współczynnik przy trzecim wyrazie. Jak widać, efekty relatywistyczne dla małych prędkości względnych źródła światła i detektora występują dopiero w wyrazie β^2.

W radarze policyjnym do pomiaru prędkości v pojazdu wykorzystano zjawisko Dopplera dla mikrofal. Źródło umieszczone w radarze wysyła wiązkę mikrofal o częstości (własnej) ν_0 skierowaną wzdłuż jezdni. Samochód jadący w kierunku radaru „widzi" wiązkę o częstości większej, przesuniętej na skutek zjawiska Dopplera. Samochód odbija wiązkę do tyłu, kierując ją w stronę radaru. Samochód jedzie w kierunku radaru, dlatego też detektor w radarze będzie odbierał wiązkę mikrofal o jeszcze bardziej zwiększonej częstości. Odpowiednie układy mierzą tę częstość i porównują ją z wartością ν_0, a różnicę przeliczają na prędkość v samochodu.

Zjawisko Dopplera w astronomii

Obserwując obiekty astronomiczne, takie jak gwiazdy, galaktyki i inne źródła światła, często musimy wyznaczać prędkości, z którymi obiekty te oddalają lub zbliżają się, mierząc *przesunięcie dopplerowskie* docierającego do nas światła. Jeżeli pewna gwiazda spoczywałaby względem nas, to obserwowalibyśmy jej światło o pewnej częstości własnej ν_0. Jeżeli gwiazda ta będzie się oddalać lub zbliżać do nas wzdłuż linii łączącej ją z nami, to częstość ν obserwowanego światła w wyniku zjawiska Dopplera będzie różna od częstości ν_0. Przesunięcie dopplerowskie występuje tylko w wyniku ruchu *radialnego* gwiazdy (ruchu wzdłuż prostej łączącej gwiazdę z obserwatorem). Prędkość, którą wyznaczymy, mierząc przesunięcie dopplerowskie, odpowiada tylko *radialnej składowej* prędkości gwiazdy.

Załóżmy, że prędkość radialna v pewnej gwiazdy jest na tyle mała (również wartość β jest mała), że możemy zaniedbać wyraz β^2 w równaniu (38.31). Zapiszmy także jawnie znak „$\pm$" poprzedzający wyraz β. Przypominamy, że znak „minus" odpowiada oddalaniu się, a „plus" zbliżaniu się gwiazdy do nas. Po przyjęciu tych założeń równanie (38.31) można zapisać w postaci

$$\nu = \nu_0(1 \pm \beta). \quad (38.32)$$

W pomiarach astronomicznych odnoszących się do światła zwykle posługujemy się długością fali, a nie częstością i dlatego ν zastąpimy przez c/λ, a ν_0 przez c/λ_0, gdzie λ oznacza obserwowaną długość fali, a λ_0 jest **własną długością fali**. Zastępując ponadto w równaniu (38.32) β przez v/c, otrzymamy równanie

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\left(1 \pm \frac{v}{c}\right),$$

które można przekształcić, wyznaczając prędkość v

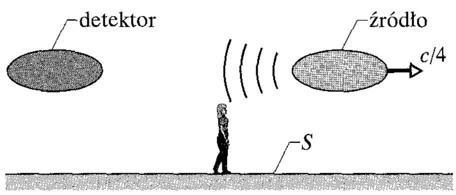
$$v = \pm\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}c.$$

Zazwyczaj zależność tę zapisuje się w postaci

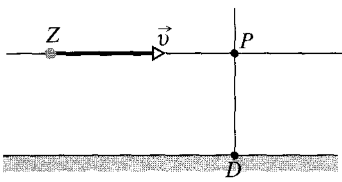
$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c \quad \text{(radialna prędkość źródła światła, } v \ll c\text{)}, \qquad (38.33)$$

gdzie $\Delta\lambda$ $(= |\lambda - \lambda_0|)$ jest *dopplerowskim przesunięciem długości fali* dla źródła światła. Jeżeli źródło oddala się od nas, to λ ma większą wartość niż λ_0 i przesunięcie dopplerowskie nazywamy *przesunięciem ku czerwieni.* (Nie oznacza to wcale, że obserwowane światło ma barwę czerwoną lub w ogóle jest widzialne; znaczy to tylko tyle, że długość fali wzrosła). Podobnie, jeżeli źródło porusza się w naszą stronę, to λ ma wartość mniejszą niż λ_0 i przesunięcie dopplerowskie jest nazywane *przesunięciem ku błękitowi.*

✔**SPRAWDZIAN 4:** Na rysunku przedstawiono źródło światła o częstości własnej ν_0, które porusza się w prawo z prędkością $c/4$ zmierzoną w układzie odniesienia S. Na rysunku pokazano także detektor, który mierzy częstość $\nu > \nu_0$ wysyłanego przez źródło światła. a) Czy detektor porusza się w lewo, czy w prawo? b) Czy prędkość detektora zmierzona w układzie S jest większa, mniejsza, czy może równa $c/4$?



Poprzeczne zjawisko Dopplera



Rys. 38.12. Źródło światła Z poruszające się z prędkością $\vec{v}$ mija w pewnej odległości detektor D. Szczególna teoria względności przewiduje występowanie zjawiska Dopplera także w punkcie P, w którym prędkość źródła jest prostopadła do linii łączącej je z detektorem. W opisie nierelatywistycznym takie zjawisko (poprzeczne zjawisko Dopplera) nie powinno być obserwowane

Dotychczas — teraz i w rozdziale 18 — zajmowaliśmy się zjawiskiem Dopplera w przypadku, kiedy źródło fal i detektor poruszały się wzdłuż łączącej je linii. Na rysunku 38.12 pokazano inną sytuację, w której źródło Z mija detektor D w pewnej odległości od niego. Gdy źródło Z dociera do punktu P, jego prędkość jest skierowana prostopadle do linii łączącej Z i D. Przez moment nie zbliża się ono, ani nie oddala od detektora. Jeżeli źródło wysyła falę dźwiękową o częstości ν_0, detektor rejestruje dokładnie tę częstość, odbierając fale, które były wysłane w punkcie P. Jeżeli jednak źródło emituje fale świetlne, nadal obserwujemy zjawisko Dopplera, nazywane w tym przypadku **poprzecznym zjawiskiem Dopplera**. Obserwowana częstość światła docierającego ze źródła w punkcie P wynosi

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{(poprzeczne zjawisko Dopplera).} \qquad (38.34)$$

Dla małych prędkości ($\beta \ll 1$) można rozwinąć prawą stroną równania (38.34) w szereg potęgowy względem β, co — jeżeli ograniczymy się do wyrazów drugiego rzędu — prowadzi do wzoru

$$\nu = \nu_0\left(1 - \tfrac{1}{2}\beta^2\right) \quad \text{(małe prędkości).} \qquad (38.35)$$

W tym przypadku pierwszy wyraz jest dokładnie taki, jakiego oczekiwalibyśmy dla fal dźwiękowych. Także i tym razem efekty relatywistyczne dla małych prędkości względnych źródła światła i detektora dotyczą wyrazu β^2.

W zasadzie radary policyjne mogłyby mierzyć prędkość samochodu nawet wtedy, kiedy wiązka byłaby skierowana prostopadle do kierunku jego jazdy. Z równania (38.35) wynika jednak, że ponieważ nawet dla szybko jadących samochodów wartość β jest bardzo mała, więc człon relatywistyczny $\beta^2/2$ jest bliski zera. Widzimy więc, że $\nu \approx \nu_0$ i radar wskaże w tym przypadku prędkość równą zeru. Dlatego policjanci zawsze starają się kierować wiązkę pomiarową wzdłuż toru jazdy samochodu, aby zmierzyć przesunięcie dopplerowskie i stąd faktyczną jego prędkość. Każde odchylenie wiązki od idealnego ustawienia działa na korzyść kierowcy, ponieważ zmniejsza zmierzoną prędkość.

Poprzeczne zjawisko Dopplera jest w rzeczywistości kolejnym przejawem dylatacji czasu. Jeżeli przepiszemy równanie (38.34), wprowadzając do niego okres drgań $T = 1/\nu$, to otrzymamy zależność

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma T_0, \tag{38.36}$$

w której przez T_0 $(= 1/\nu_0)$ oznaczyliśmy **okres własny** źródła. Jeżeli uwzględnimy fakt, że okres drgań to nic innego, jak odstęp czasu, z łatwością zobaczymy, że równanie (38.36) to wzór na dylatację czasu (38.9).

System nawigacyjny NAVSTAR

Każdy satelita należący do systemu NAVSTAR stale nadaje sygnały radiowe informujące o swoim położeniu. Transmisja odbywa się na częstości, która jest stabilizowana za pomocą precyzyjnych zegarów atomowych. Częstości sygnałów odbieranych na przykład przez samolot pasażerski są zmienione na skutek przesunięcia dopplerowskiego. Odbierając jednocześnie sygnały z kilku satelitów NAVSTAR, można wyznaczyć kierunek, w którym znajduje się każdy z nich, a także kierunek prędkości tego satelity. Dzięki temu, na podstawie przesunięcia dopplerowskiego częstości sygnału, odbiornik może wyznaczyć prędkość samolotu.

Przeprowadzając proste obliczenia, spróbujemy przekonać się, jaką dokładność można w ten sposób osiągnąć. Typowa prędkość satelity systemu NAVSTAR mierzona względem środka Ziemi wynosi około $1 \cdot 10^4$ m/s, a zatem wartość β jest bliska $3 \cdot 10^{-5}$. Wyraz $\beta^2/2$ występujący w równaniach (38.31) i (38.35) (człon relatywistyczny) ma wartość około $4{,}5 \cdot 10^{-10}$. Innymi słowy teoria względności zmienia przesunięcie dopplerowskie o mniej więcej 4,5 części na 10^{10}, czyli w stopniu, który wydaje się niegodny uwagi.

W rzeczywistości jest to bardzo ważne. Zegary atomowe na pokładzie satelitów są tak dokładne, że dopuszczalna zmiana częstości sygnału wynosi zaledwie 2 części na 10^{12}. Z równania (38.35) wynika, że β (a tym samym v) zależy od pierwiastka kwadratowego z ν/ν_0. Oznacza to, że zmiana częstości zegara o $2 \cdot 10^{-12}$ spowoduje względną zmianę mierzonej wartości prędkości względnej satelity i samolotu o

$$\sqrt{2 \cdot 10^{-12}} = 1{,}4 \cdot 10^{-6}.$$

Prędkość względna samolotu i satelity v jest przede wszystkim wynikiem ogromnej prędkości satelity i wynosi około $1 \cdot 10^4$ m/s. Dokładność, z jaką można ją wyznaczyć — a tym samym także prędkość samolotu — jest zbliżona do

$$(1.4 \cdot 10^{-6}) \cdot (1 \cdot 10^4 \text{ m/s}) = 1.4 \text{ cm/s}.$$

Wyobraźmy sobie, że lot samolotu trwa 1 h (3600 s). Znając prędkość z dokładnością do około 1,4 cm/s, możemy określić położenie samolotu na końcu lotu z dokładnością do około

$$(0.014 \text{ m/s})(3600 \text{ s}) = 50 \text{ m},$$

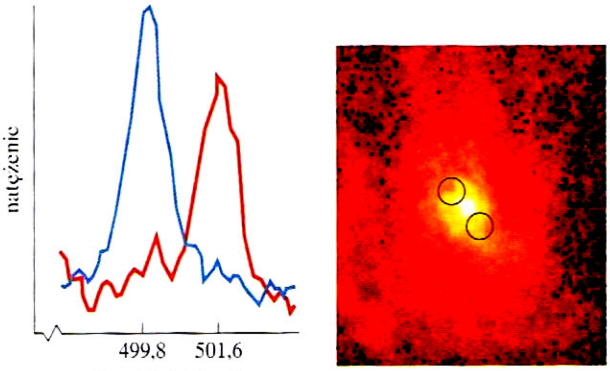
która wystarcza dla potrzeb współczesnej nawigacji.

Jeżeli pominęlibyśmy w obliczeniach człony relatywistyczne, to nie zdołalibyśmy wyznaczyć prędkości z niepewnością mniejszą niż 21 cm/s, a znajomość położenia samolotu po godzinie lotu byłaby obarczona niepewnością wynoszą co najmniej 760 m.

Przykład 38.5

Zaobserwowano światło docierające do nas z międzygwiazdowego obłoku gazowego z galaktyki M87. Na rysunku 38.13a przedstawiono wykres zależności natężenia tego światła od długości fali w przypadku obserwacji światła wysłanego z dwóch części obłoku znajdujących się po przeciwnych stronach centrum galaktyki. Jedna z krzywych osiąga maksimum dla długości fali 499.8 nm, a druga dla 501.6 nm. Gaz okrąża centrum galaktyki po orbicie o promieniu r = 100 lat świetlnych, przy czym z jednej strony porusza się w naszą stronę, a z drugiej — w stronę przeciwną.

a) Która z krzywych na wykresie odpowiada gazowi poruszającemu się w naszą stronę? Ile wynosi prędkość gazu względem nas (i względem centrum galaktyki)?



Rys. 38.13. Przykład 38.5. a) Obserwowane natężenie światła docierającego z gazu po obydwu stronach galaktyki M87 przedstawione w zależności od długości fali. b) Zdjęcie centralnego obszaru galaktyki M87. Kółka wskazują położenie części gazu, którego promieniowanie przedstawiono na wykresie (a). Jądro galaktyki M87 znajduje się w połowie odległości między kółkami

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Gdyby gaz nie poruszał się wokół galaktyki, obserwowalibyśmy jedno maksimum natężenia światła.

2. Ruch gazu wpływa na obserwowaną długość fali dzięki zjawisku Dopplera. Obserwowana długość fali zwiększa się dla oddalającego się źródła, a maleje dla zbliżającego się źródła.

Wynika stąd, że krzywa o maksimum dla długości fali 501,6 nm odpowiada ruchowi w kierunku od nas, a krzywa o maksimum dla długości 499,8 nm odpowiada ruchowiu ku nam.

Załóżmy teraz, że zmiany długości fali spowodowane ruchem gazu mają jednakowe wartości. W takim przypadku za długość własną fali można przyjąć średnią arytmetyczną wartości odpowiadających maksimom obu przesuniętych krzywych:

$$\lambda_0 = \frac{501.6 \text{ nm} + 499.8 \text{ nm}}{2} = 500.7 \text{ nm}.$$

Przesunięcie dopplerowskie $\Delta\lambda$ dla światła pochodzącego z obłoku gazu oddalającego się od nas jest więc równe

$$\Delta\lambda = |\lambda - \lambda_0| = 501.6 \text{ nm} - 500.7 \text{ nm}$$
$$= 0.9 \text{ nm}.$$

Podstawiamy uzyskane przesunięcie i długość fali λ = 501.6 nm do równania (38.33) i obliczamy prędkość gazu

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = \frac{0.9 \text{ nm}}{501.6 \text{ nm}} 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$
$$= 5.38 \cdot 10^5 \text{ m/s}. \qquad \text{(odpowiedź)}$$

b) Gaz obiega centrum galaktyki, ponieważ działa nań siła grawitacyjna ze strony zgromadzonej w centrum masy M. Ile wynosi ta masa wyrażona w jednostkach równych masie Słońca M_S (= $1.99 \cdot 10^{30}$ kg)?

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Wartość siły grawitacyjnej działającej na ciało o masie m poruszające się po orbicie kołowej o promieniu r jest określona równaniem (14.1)

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

2. Ciało poruszające się po orbicie kołowej wokół centrum galaktyki musi mieć przyspieszenie dośrodkowe o wartości $a = v^2/r$ skierowane w stronę centrum.

3. Druga zasada dynamiki Newtona zapisana dla kierunku radialnego ma postać $F = ma$.

Spostrzeżenia te możemy połączyć ze sobą w postaci równania

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Rozwiązując to równanie względem M i podstawiając znane wartości, obliczymy wartość masy zgromadzonej w centrum galaktyki

$$\begin{aligned} M &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{(5{,}38 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s})^2 (100\ \mathrm{y})(9{,}46 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m/y})}{6{,}67 \cdot 10^{41}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}} \\ &= 4{,}11 \cdot 10^{39}\ \mathrm{kg} = (2{,}1 \cdot 10^9) M_S. \qquad \text{(odpowiedź)} \end{aligned}$$

Wynik ten oznacza, że w centrum galaktyki została zgromadzona ogromna masa odpowiadająca masie 2 miliardów Słońc, co sugeruje, że może tam znajdować się bardzo ciężka czarna dziura.

38.11. Nowe spojrzenie na pęd

Wyobraźmy sobie, że kilku obserwatorów — każdy w innym inercjalnym układzie odniesienia — bada izolowane zderzenie dwóch cząstek. W przypadku nierelatywistycznym każdy z obserwatorów mierzy różne prędkości zderzających się cząstek, ale wszyscy twierdzą, że spełniona jest zasada zachowania pędu. Zgodnie stwierdzają oni, że pęd po zderzeniu cząstek jest taki sam, jak przed zderzeniem.

Jak wygląda to z punktu widzenia teorii względności? Możemy przekonać się, że jeżeli nadal będziemy definiować pęd cząstki $\vec{p}$ jako iloczyn masy i prędkości $m\vec{v}$, to według obserwatorów w różnych inercjalnych układach odniesienia całkowity pęd *nie będzie* zachowany. Mamy dwie możliwości: 1) zrezygnować z zasady zachowania pędu lub 2) zmodyfikować definicję pędu w taki sposób, aby zasada zachowania pędu w dalszym ciągu obowiązywała. Właściwym wyborem jest przyjęcie drugiej możliwości.

Rozważmy cząstkę poruszającą się ze stałą prędkością v w dodatnim kierunku osi x. W ujęciu nierelatywistycznym pęd cząstki ma wartość

$$p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(pęd nierelatywistyczny)}, \qquad (38.37)$$

gdzie Δx oznacza odległość przebytą w czasie Δt. Poszukiwania relatywistycznego wyrażenia na pęd zaczniemy od nowej definicji

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}.$$

Tak samo jak poprzednio, Δx oznacza drogę przebytą przez cząstkę, którą zmierzył pewien obserwator. Jednak teraz Δt_0 nie jest czasem potrzebnym do przebycia tej drogi zmierzonym przez obserwatora patrzącego z boku na poruszającą się cząstkę, lecz czasem, który wyznaczył obserwator poruszający się wraz z cząstką. Cząstka spoczywa względem tego obserwatora i w konsekwencji czas, który on mierzy, jest czasem własnym.

Korzystając ze wzoru na dylatację czasu (równanie (38.9)), możemy to zapisać w postaci równania

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma.$$

Iloraz $\Delta x/\Delta t$ to nic innego jak prędkość cząstki v, dlatego też definicja pędu wyraża się wzorem

$$p = \gamma m v \qquad \text{(pęd).} \tag{38.38}$$

Zwróćmy uwagę, że ta definicja różni się od definicji nierelatywistycznej (równanie (38.37)) tylko obecnością współczynnika Lorentza γ. Różnica ta jest jednak bardzo ważna: W przeciwieństwie do pędu nierelatywistycznego, pęd relatywistyczny dąży do nieskończoności, gdy prędkość v dąży do c.

Definicję zapisaną w równaniu (38.38) można uogólnić do postaci wektorowej

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \qquad \text{(pęd).} \tag{38.39}$$

Równanie to poprawnie definiuje pęd dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości. W przypadku prędkości znacznie mniejszych od c redukuje się do znanej postaci nierelatywistycznej ($\vec{p} = m\vec{v}$).

38.12. Nowe spojrzenie na energię

Energia spoczynkowa

Chemia przez długi czas rozwijała się przy założeniu, że w reakcjach chemicznych energia i masa są zachowywane niezależnie od siebie. W roku 1905 Einstein wykazał, że w sformułowanej przez niego teorii względności trzeba rozpatrywać masę jak jedną z postaci energii. Dlatego zasada zachowania energii jest w rzeczywistości zasadą zachowania energii i masy.

W *reakcji chemicznej* (procesie, w którym oddziałują atomy i cząsteczki) przemianie na inne postacie energii (lub na odwrót) ulega niezmiernie mała część masy i dlatego nie ma żadnej szansy na zauważenie jej zmiany nawet wtedy, gdy posłużymy się najlepszymi wagami laboratoryjnymi. Może więc *wydawać się*, że masę i energię można rozpatrywać niezależnie od siebie. Jednakże w *reakcji jądrowej* (procesie, w którym oddziałują jądra i cząstki elementarne) wyzwalana energia bywa milion razy większa niż w przypadku reakcji chemicznej i zmianę masy można z łatwością wyznaczyć. Uwzględnianie w reakcjach jądrowych przemian masa–energia jest już od dawna standardowym postępowaniem.

Masa m i równoważna jej energia E_0 są powiązane ze sobą zależnością

$$E_0 = mc^2, \tag{38.40}$$

która — bez wskaźnika 0 — jest chyba najlepiej znanym równaniem fizyki. Energia związana z masą ciała nosi nazwę **energii spoczynkowej**. Nazwa mówi, że energię E_0 ma ciało nawet wtedy, kiedy spoczywa, i jest to wyłącznie konsekwencją faktu, że ciało ma masę. (Jeśli poznając fizykę, wyjdziecie poza ramy tego podręcznika, to prawdopodobnie spotkacie bardziej szczegółowe rozważania na temat związku masy i energii. Możecie nawet napotkać spory o to, co naprawdę oznacza podana relacja).

Tabela 38.3. Wartości energii spoczynkowej wybranych ciał

Ciało	Masa [kg]	Energia spoczynkowa	
Elektron	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	$8{,}19 \cdot 10^{14}$ J	(= 511 keV)
Proton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	$1{,}50 \cdot 10^{-10}$ J	(= 938 MeV)
Atom uranu	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$	$3{,}55 \cdot 10^{-8}$ J	(= 225 GeV)
Drobina kurzu	$1 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{4}$ J	(= 2 kcal)
Moneta 1 grosz	$1{,}65 \cdot 10^{-3}$	$1{,}48 \cdot 10^{13}$ J	(= 41 GWh)

W tabeli 38.3 podano wartości energii spoczynkowej dla kilku ciał. Jak widać, energia spoczynkowa małej monety, na przykład grosza, jest olbrzymia — równoważna ilość energii elektrycznej ma wartość rzędu 10^7 zł. Z drugiej strony, cała energia elektryczna wytwarzana w ciągu roku w Stanach Zjednoczonych jest równa masie spoczynkowej kilkuset kilogramów materii (kamieni, naleśników lub czegokolwiek innego).

W praktyce, w równaniu (38.40) rzadko kiedy używa się jednostek układu SI, ponieważ są zbyt duże. Masę wyraża się zwykle w atomowych jednostkach masy

$$1\ \mathrm{u} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}, \tag{38.41}$$

a energię w elektronowoltach

$$1\ \mathrm{eV} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \tag{38.42}$$

lub ich wielokrotnościach. Stała c^2 ma w jednostkach przyjętych w równaniach (38.41) i (38.42) wartość

$$\begin{aligned} c^2 &= 9{,}315 \cdot 10^8\ \mathrm{eV/u} = 9{,}315 \cdot 10^5\ \mathrm{keV/u} \\ &= 931{,}5\ \mathrm{MeV/u}. \end{aligned} \tag{38.43}$$

Energia całkowita

Równanie (38.40) wyraża energię spoczynkową E_0 związaną z masą ciała m. Energia spoczynkowa nie zależy od tego, czy ciało to spoczywa, czy się porusza. Kiedy jednak ciało jest w ruchu, ma dodatkową energię w postaci energii kinetycznej E_k. Jeżeli założymy, że jego energia potencjalna jest równa zeru, to energia całkowita E jest sumą energii spoczynkowej i energii kinetycznej:

$$E = E_0 + E_k = mc^2 + E_k. \tag{38.44}$$

Całkowita energia E jest też dana równaniem (co podajemy bez dowodu)

$$E = \gamma mc^2, \tag{38.45}$$

gdzie γ jest współczynnikiem Lorentza.

Począwszy od rozdziału 7, rozważaliśmy już wiele przykładów dotyczących zmiany energii całkowitej cząstki lub układu cząstek. Jednakże nigdy to tej pory nie uwzględnialiśmy zmian energii spoczynkowej, ponieważ były one po prostu równe zeru, albo tak małe, że można było je zaniedbać. Zasada zachowania energii całkowitej obowiązuje nawet wtedy, kiedy zmiany energii spoczynkowej są znaczne. Niezależnie od tego, co się dzieje z energią spoczynkową, stwierdzenie podane w paragrafie 8.7 nadal zachowuje swą moc:

➤ Całkowita energia *układu izolowanego* nie ulega zmianie.

Jeżeli, na przykład, zmaleje sumaryczna energia spoczynkowa układu izolowanego składającego się z dwu oddziałujących ze sobą cząstek, musi pojawić się energia w jakiejś innej postaci, ponieważ energia całkowita nie może ulec zmianie.

Zmianę energii spoczynkowej układu, spowodowaną zachodzącą w nim reakcją chemiczną lub jądrową, przyjęło się oznaczać symbolem Q i nazywać energią reakcji. Wartość Q można obliczyć, posługując się następującym równaniem:

$$\begin{pmatrix}\text{całkowita początkowa}\\ \text{energia spoczynkowa układu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{całkowita końcowa}\\ \text{energia spoczynkowa układu}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{energia}\\ \text{reakcji}\end{pmatrix},$$

czyli

$$E_{0,\mathrm{pocz}} = E_{0,\mathrm{końc}} + Q. \tag{38.46}$$

Korzystając z równania (38.40) ($E_0 = mc^2$), można wyrazić energię reakcji Q w zależności od *całkowitej* masy początkowej M_{pocz} oraz *całkowitej* masy końcowej $M_{\mathrm{końc}}$

$$M_{\mathrm{pocz}}c^2 = M_{\mathrm{końc}}c^2 + Q,$$

czyli

$$Q = M_{\mathrm{pocz}}c^2 - M_{\mathrm{końc}}c^2 = -\Delta Mc^2, \tag{38.47}$$

gdzie $\Delta M = M_{\mathrm{końc}} - M_{\mathrm{pocz}}$ oznacza zmianę masy układu w wyniku reakcji.

Jeżeli część energii spoczynkowej ulega przemianie na przykład w energię kinetyczną, przekazywaną produktom reakcji, to całkowita energia spoczynkowa E_0 układu (a więc i jego całkowita masa M_0) zmniejsza się, a energia reakcji Q jest dodatnia. Przeciwnie, jeżeli reakcja wymaga, aby energia zamieniała się w energię spoczynkową, całkowita energia spoczynkowa E_0 układu (a więc i jego całkowita masa) rośnie, a energia reakcji Q jest ujemna.

Dobrym przykładem jest *reakcja syntezy*, w której dwa jądra wodoru łączą się w jedno jądro, czemu towarzyszy emisja dwóch cząstek. Całkowita energia spoczynkowa (a więc i całkowita masa) powstałego jądra i dwóch wyemitowanych cząstek jest mniejsza niż całkowita energia spoczynkowa (a więc i całkowita masa) dwóch jąder wodoru. Oznacza to, że energia Q reakcji syntezy jest dodatnia i dlatego mówimy, że w reakcji energia jest *wyzwalana* (zmienia się w inne formy kosztem energii spoczynkowej). Ma to dla nas wszystkich niezmiernie ważne konsekwencje, ponieważ synteza jąder wodoru we wnętrzu Słońca jest jednym z procesów, dzięki którym mamy światło słoneczne na Ziemi i może na niej rozwijać się życie.

Energia kinetyczna

W rozdziale 7 powiedzieliśmy, że energia kinetyczna E_k ciała o masie m i prędkości v dużo mniejszej od prędkości światła c wyraża się wzorem

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2. \qquad (38.48)$$

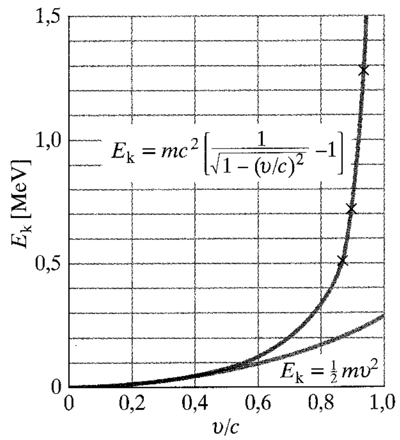
To nierelatywistyczne równanie jest dobrym przybliżeniem tylko wtedy, kiedy prędkość ciała jest naprawdę dużo mniejsza od prędkości światła.

Spróbujmy teraz znaleźć wyrażenie na energię kinetyczną, które będzie prawdziwe dla *każdej* fizycznie dozwolonej prędkości. Rozwiązując równanie (38.44) względem E_k, a następnie podstawiając do niego wartość E_0 z równania (38.4), otrzymamy

$$\begin{aligned} E_k &= E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 \\ &= mc^2(\gamma - 1) \qquad \text{(energia kinetyczna)}, \qquad (38.49) \end{aligned}$$

gdzie γ $(= 1/\sqrt{1-(v/c)^2})$ jest współczynnikiem Lorentza.

Na wykresie z rysunku 38.14 przedstawiono zależność energii kinetycznej elektronu od stosunku v/c w przypadku poprawnej definicji (równanie (38.49)) oraz w przybliżeniu nierelatywistycznym. Zwróćmy uwagę, że w lewej części wykresu — w obszarze małych prędkości, dla których do tej pory obliczaliśmy energię kinetyczną — obydwie krzywe się pokrywają. Widzimy, że w tym zakresie prędkości mieliśmy pełne prawo posługiwać się przybliżeniem nierelatywistycznym (38.48). Jednak w prawej części wykresu — kiedy prędkość ciała zbliża



Rys. 38.14. Energia kinetyczna elektronu w ujęciu relatywistycznym (równanie (38.49)) i nierelatywistycznym (równanie (38.48)) wykreślona w zależności od stosunku v/c, gdzie v jest prędkością elektronu, a c — prędkością światła. Zwróćcie uwagę, że obydwie krzywe pokrywają się dla małych prędkości i zupełnie rozbiegają się dla wielkich prędkości. Naniesione punkty pomiarowe (oznaczone symbolem $\times$) pokazują, że dla wielkich prędkości z wynikami doświadczenia zgadza się krzywa relatywistyczna

się do c — obydwie krzywe się rozbiegają. Gdy stosunek v/c zbliża się do jedności, krzywa dla przypadku nierelatywistycznego wznosi się powoli, podczas gdy linia wyznaczona na podstawie wzoru relatywistycznego pnie się bardzo stromo do góry, dążąc do nieskończoności dla $(v/c) \to 1$. Widzimy więc, że jeżeli prędkość ciała jest bliska prędkości światła c, to, obliczając energię kinetyczną, *musimy* korzystać ze wzoru (38.49).

Na podstawie rysunku 38.14 możemy też wnioskować o pracy, jaką trzeba wykonać, aby zwiększyć prędkość ciała na przykład o 1%. Praca jest równa zmianie energii kinetycznej ΔE_k ciała. Jeżeli zmiana dokonuje się w zakresie małych prędkości (lewa strona wykresu), to wymagana praca jest niewielka. Jeżeli jednak zmiana zachodzi w zakresie wielkich prędkości (prawa strona wykresu), to potrzebna praca może mieć olbrzymią wartość, ponieważ energia kinetyczna wzrasta bardzo szybko wraz z prędkością. Nadanie ciału prędkości światła c wymagałoby przekazania mu nieskończonej energii i dlatego nie jest możliwe.

Energię kinetyczną elektronów, protonów i innych cząstek podaje się zwykle w elektronowoltach lub ich wielokrotnościach. Często mówiąc o energii kinetycznej cząstek, pomijamy określenie „kinetyczna"; o elektronie, który ma energię kinetyczną 20 MeV, mówimy krótko — elektron o energii 20 MeV.

Pęd a energia kinetyczna

W fizyce nierelatywistycznej pęd p cząstki wyraża się wzorem mv, a energia kinetyczna E_k wzorem $\frac{1}{2}mv^2$. Eliminując prędkość v z obydwu tych wyrażeń, można wyznaczyć zależność między pędem a energią kinetyczną:

$$p^2 = 2E_k m \qquad \text{(nierelatywistycznie)}. \tag{38.50}$$

Podobną zależność można otrzymać w mechanice relatywistycznej, eliminując prędkość v ze wzoru na pęd (38.38) i energię kinetyczną (38.49). Po dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymujemy równanie

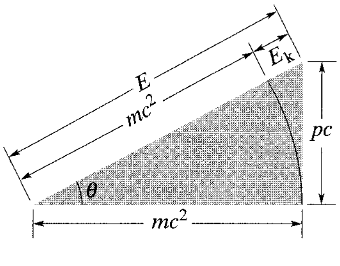
$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2. \tag{38.51}$$

Korzystając z równania (38.44), możemy powyższe równanie przekształcić tak, aby wyrażało zależność między pędem p a całkowitą energią E cząstki:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{38.52}$$

Zapamiętanie tych użytecznych zależności może ułatwić diagram w kształcie trójkąta prostokątnego przedstawiony na rysunku 38.15. Spróbujcie wykazać, że we wspomnianym trójkącie,

$$\sin\theta = \beta \quad \text{i} \quad \cos\theta = 1/\gamma. \tag{38.53}$$



Rys. 38.15. Diagram ułatwiający zapamiętanie relatywistycznych zależności między energią całkowitą E, energią spoczynkową mc^2, energią kinetyczną E_k i pędem p

Z równania (38.52) wynika, że iloczyn pc musi być wyrażany w tych samych jednostkach co energia E; dlatego można przyjąć, że jednostką pędu p jest jednostka energii E podzielona przez prędkość światła c. W praktyce, w fizyce cząstek elementarnych pęd często podaje się w jednostkach MeV/c lub GeV/c.

SPRAWDZIAN 5: Czy a) energia kinetyczna i b) całkowita energia elektronu „o energii 1 GeV" jest większa, mniejsza, czy taka sama, jak protonu „o energii 1 GeV"?

Przykład 38.6

a) Ile wynosi całkowita energia E elektronu o energii 2,53 MeV?

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że równanie (38.44) pozwala wyrazić całkowitą energię E elektronu jako sumę jego energii spoczynkowej mc^2 i energii kinetycznej:

$$E = mc^2 + E_k. \tag{38.54}$$

Określenie elektron „o energii 2,53 MeV" w treści zadania oznacza, że to energia kinetyczna elektronu jest równa 2,53 MeV. Aby obliczyć energię spoczynkową mc^2 elektronu, musimy odnaleźć w dodatku B masę elektronu. Wykonawszy obliczenia, otrzymamy

$$\begin{aligned} mc^2 &= (9,109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg})(2,998 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 \\ &= 8,187 \cdot 10^{-14}\ \text{J}. \end{aligned}$$

Jeżeli podzielimy ten wynik przez $1,602 \cdot 10^{-13}$ J/MeV, otrzymamy 0,511 MeV, czyli wartość energii spoczynkowej elektronu w MeV (wynik zgodny z tabelą 38.3). Z równania (38.54) obliczamy

$$E = 0,511\ \text{MeV} + 2,53\ \text{MeV} = 3,04\ \text{MeV}. \quad \text{(odpowiedź)}$$

b) Jaka jest wartość pędu p elektronu, wyrażona w jednostkach MeV/c?

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że pęd p obliczymy z równania (38.52)

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2,$$

jeżeli będziemy znać energię całkowitą E i energię spoczynkową mc^2. Rozwiązując to równanie względem pc, otrzymamy

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \\ &= \sqrt{(3,04\ \text{MeV})^2 - (0,511\ \text{MeV})^2} = 3\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Dzieląc teraz obydwie strony równania przez c, stwierdzamy, że

$$p = 3\ \text{MeV}/c. \quad \text{(odpowiedź)}$$

Przykład 38.7

Proton o największej zmierzonej kiedykolwiek energii kinetycznej dotarł na Ziemię wraz z innymi cząstkami składającymi się na promieniowanie kosmiczne. Jego zdumiewająco wielka energia kinetyczna $3 \cdot 10^{20}$ eV była dostatecznie duża, aby ogrzać łyżeczkę wody o kilka stopni.

a) Ile wynosi współczynnik Lorentza γ i prędkość v protonu o wspomnianej energii (wartości należy podać względem detektora znajdującego się na Ziemi)?

ROZWIĄZANIE:

Zauważmy, że:

1. Współczynnik Lorentza γ dla protonu występuje w równaniu (38.45) ($E = \gamma mc^2$), które wiąże energię całkowitą E z energią spoczynkową mc^2.

2. Energia całkowita protonu jest sumą jego energii spoczynkowej mc^2 i (podanej) energii kinetycznej E_k. Zapisując obydwa te spostrzeżenia w postaci jednego równania, otrzymujemy

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + E_k}{mc^2} = 1 + \frac{E_k}{mc^2}. \tag{38.55}$$

Energię spoczynkową mc^2 możemy obliczyć, korzystając z masy protonu podanej w dodatku B, tak jak zrobiliśmy to dla elektronu w przykładzie 38.6a. Stwierdzamy, że wartość mc^2 wynosi 938 MeV (wynik zgodny z tabelą 38.3). Podstawiając wartość energii spoczynkowej i energii kinetycznej do równania (38.55), mamy

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{3 \cdot 10^{20}\ \text{eV}}{938 \cdot 10^6\ \text{eV}} \\ &= 3,198 \cdot 10^{11} \approx 3,2 \cdot 10^{11}. \quad \text{(odpowiedź)} \end{aligned}$$

Wartość γ jest tak duża, że prędkości v nie można obliczyć, posługując się wprost definicją współczynnika Lorentza w postaci równania (38.8). Łatwo się o tym przekonać, próbując wykonać obliczenia za pomocą kalkulatora. Okaże się, że parametr β jest praktycznie równy 1, a więc prędkość v jest równa c. Istotnie prędkość v jest bardzo bliska c, ale chcemy uzyskać dokładniejszy wynik. Dlatego rozwiążemy równanie (38.8) względem $1-\beta$. Zaczniemy od zapisania wzoru na współczynnik Lorentza w postaci

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}}.$$

Wykorzystaliśmy tu fakt, że wartość β jest bardzo bliska jedności, a więc $1+\beta$ jest prawie równe 2. Prędkość, którą chcemy obliczyć, jest ukryta w członie $1-\beta$. Rozwiązując równanie względem tego wyrazu, otrzymamy

$$1-\beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{2(3{,}198 \cdot 10^{11})^2} = 4{,}9 \cdot 10^{-24} \approx 5 \cdot 10^{-24}.$$

Jak widać

$$\beta = 1 - 5 \cdot 10^{-24}.$$

Ponieważ $v = \beta c$, więc

$$v \approx 0{,}999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \qquad \text{(odpowiedź)}$$

b) Wyobraźmy sobie, że nasz proton porusza się po średnicy Drogi Mlecznej ($9{,}8 \cdot 10^4$ lat świetlnych). Ile czasu — w układzie odniesienia związanym z Ziemią i Drogą Mleczną — zajmie protonowi pokonanie tej drogi?

ROZWIĄZANIE:

Przekonaliśmy się, że ten *ultrarelatywistyczny* proton porusza się z prędkością nieznacznie mniejszą od prędkości światła. O⸺ Z definicji roku świetlnego wynika, że jest to odległość, którą światło pokonuje w ciągu 1 roku. Widzimy, że przebycie odległości $9{,}8 \cdot 10^4$ lat świetlnych zajmie światłu $9{,}8 \cdot 10^4$ lat. Interesujący nas proton przebędzie tę odległość właściwie w takim samym czasie. W układzie odniesienia Ziemia–Droga Mleczna podróż protonu będzie trwać

$$\Delta t = 9{,}8 \cdot 10^4 \text{ a}. \qquad \text{(odpowiedź)}$$

c) Jak długo będzie trwać ta sama podróż według pomiaru w układzie odniesienia związanym z protonem?

ROZWIĄZANIE:

Aby odpowiedzieć na to pytanie, powinniśmy dostrzec, że:

O⸺ 1. W zadaniu mamy do czynienia z pomiarami w dwóch (inercjalnych) układach odniesienia: pierwszym związanym z Ziemią oraz Drogą Mleczną i drugim związanym z protonem.

O⸺ 2. W zadaniu można wskazać dwa zdarzenia: pierwszym jest przejście protonu przez początek odcinka uznawanego za średnicę Drogi Mlecznej, a drugim — przejście protonu przez koniec tego odcinka.

O⸺ 3. Odstęp czasu mierzony w układzie odniesienia związanym z protonem jest czasem własnym Δt_0, ponieważ w tym układzie odniesienia obydwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu — tam, gdzie znajduje się proton.

O⸺ 4. Odstęp czasu Δt_0 w układzie związanym z protonem można obliczyć, znając odstęp czasu w układzie Ziemia–Droga Mleczna, korzystając w tym celu z równania (38.9) ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$), które opisuje dylatację czasu.

Rozwiązując równanie (38.9) względem Δt_0 i podstawiając doń wartość γ obliczoną w punkcie (a) oraz wartość Δt obliczoną w punkcie (b), otrzymamy

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9{,}8 \cdot 10^4 \text{ a}}{3{,}198 \cdot 10^{11}}$$
$$= 3{,}06 \cdot 10^{-7} \text{ a} = 9{,}7 \text{ s}. \qquad \text{(odpowiedź)}$$

W naszym układzie odniesienia podróż protonu trwa 98 000 lat. W układzie odniesienia związanym z protonem zajmuje ona zaledwie 9,7 s! Jak mówiliśmy już na samym początku rozdziału, ruch względny może zmienić szybkość, z jaką płynie czas, i teraz napotkaliśmy ekstremalny przykład takiej zmiany.

Podsumowanie

Postulaty Stworzona przez Einsteina **szczególna teoria względności** jest oparta na dwóch postulatach:

1. Prawa fizyki są takie same dla obserwatorów we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Żaden z układów nie jest wyróżniony.
2. Prędkość światła w próżni ma taką samą wartość c we wszystkich kierunkach i we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Prędkość światła c w próżni jest prędkością graniczną, której nie może przekroczyć żadne ciało niosące energię lub informację.

Współrzędne zdarzenia **Zdarzenie** jest określone przez trzy współrzędne przestrzenne i jedną współrzędną czasową. Do zadań szczególnej teorii względności należy między innymi ustalanie związków między współrzędnymi, przypisywanymi zdarzeniom przez obserwatorów poruszających się względem siebie ruchem jednostajnym.

Zdarzenia jednoczesne Dwaj obserwatorzy, którzy poruszają się względem siebie, nie będą na ogół zgodni co do jednoczesności zdarzeń. Jeżeli jeden z obserwatorów stwierdza, że dwa zdarzenia zachodzą jednocześnie w różnych miejscach, drugi obserwator będzie innego zdania i na odwrót. Jednoczesność *nie* jest pojęciem absolutnym, lecz względnym, zależnym od ruchu obserwatora. Względność jednoczesności jest bezpośrednią konsekwencją skończonej prędkości granicznej c.

Dylatacja czasu Jeżeli dwa zdarzenia zachodzą w inercjalnym układzie odniesienia w tym samym miejscu, to dzielący je odstęp czasu Δt_0, mierzony za pomocą jednego zegara znajdującego się w miejscu tych zdarzeń, nazywamy **czasem własnym** między zdarzeniami. *Obserwatorzy w układach odniesienia poruszających się względem tego układu zmierzą większy odstęp czasu między tymi samymi zdarzeniami.* Obserwator poruszający się z prędkością względną v zmierzy odstęp czasu równy

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$= \gamma \Delta t_0 \quad \text{(dylatacja czasu).} \qquad (38.7\text{–}38.9)$$

Parametr $\beta = v/c$ wyraża prędkość względną w jednostkach c, a parametr $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ jest nazywany **współczynnikiem Lorentza.**

Skrócenie długości Długość L_0 pewnego ciała zmierzona przez obserwatora w inercjalnym układzie odniesienia, w którym ciało to spoczywa, jest nazywana **długością własną** lub **długością spoczynkową**. *Obserwatorzy w układach odniesienia poruszających się względem tego układu, w kierunku równoległym do mierzonej długości, zmierzą mniejszą długość ciała.* Obserwator poruszający się z prędkością względną v zmierzy długość równą

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{(skrócenie długości).} \qquad (38.13)$$

Transformacja Lorentza Transformacja Lorentza wiąże ze sobą współrzędne czasoprzestrzenne pewnego zdarzenia zarejestrowanego przez obserwatorów w dwóch inercjalnych układach odniesienia, S i S', przy czym układ S' porusza się względem S z prędkością v w dodatnim kierunku osi x i x'. Cztery współrzędne są powiązane następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad \begin{matrix}\text{(transformacja Lorentza;} \\ \text{prawdziwa dla wszystkich} \\ \text{fizycznie dozwolonych prędkości).}\end{matrix} \qquad (38.20)$$

Względność prędkości Jeżeli cząstka porusza się z prędkością u' w dodatnim kierunku osi x' inercjalnego układu odniesienia S', który sam porusza się z prędkością v równolegle do osi x innego inercjalnego układu S, to prędkość cząstki u zmierzona w układzie S będzie równa

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \begin{matrix}\text{(relatywistyczna} \\ \text{transformacja prędkości).}\end{matrix} \qquad (38.28)$$

Relatywistyczne zjawisko Dopplera Jeżeli źródło emitujące fale świetlne o częstości ν_0 oddala się od detektora ze względną prędkością radialną v ($\beta = v/c$), to częstość fali zarejestrowana przez detektor będzie równa

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \qquad (38.30)$$

Jeżeli źródło zbliża się do detektora, to znaki przy β w równaniu (38.30) trzeba zmienić na przeciwne.

W astronomii mierzy się zwykle długości fali. Dla prędkości dużo mniejszych niż c równanie (38.30) sprowadza się do

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c, \qquad (38.33)$$

gdzie $\Delta\lambda$ oznacza *przesunięcie dopplerowskie* (zmianę) długości fali spowodowane ruchem względnym.

Poprzeczne zjawisko Dopplera Jeżeli ruch źródła fali świetlnej odbywa się prostopadle do linii łączącej źródło i detektor, to wzór na obserwowaną częstość fali ma postać

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (38.34)$$

Poprzeczne zjawisko Dopplera jest przejawem dylatacji czasu.

Pęd i energia Następujące definicje pędu $\vec{p}$, energii kinetycznej E_k i energii całkowitej E cząstki o masie m obowiązują dla wszystkich fizycznie dozwolonych prędkości:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad \text{(pęd),} \qquad (38.39)$$
$$E = mc^2 + E_k = \gamma mc^2 \quad \text{(energia całkowita),} \qquad (38.44, 38.35)$$
$$E_k = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(energia kinetyczna).} \qquad (38.49)$$

W tym przypadku γ oznacza współczynnik Lorentza związany z ruchem cząstki, a mc^2 jest *energią spoczynkową* związaną z jej masą. Wychodząc z tych równań, można otrzymać zależności łączące energię całkowitą, energię kinetyczną i pęd

$$(pc)^2 = E_k^2 + 2E_kmc^2 \qquad (38.51)$$

oraz

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \qquad (38.52)$$

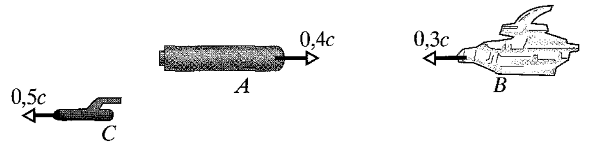
Energia reakcji Q dla układu cząstek, w którym zachodzi reakcja chemiczna lub jądrowa, jest równa zmianie całkowitej energii spoczynkowej układu ze znakiem minus:

$$Q = M_{pocz}c^2 - M_{koń c}c^2 = -\Delta Mc^2, \qquad (38.47)$$

gdzie M_{pocz} i $M_{koń c}$ oznaczają całkowitą masę układu przed i po reakcji.

Pytania

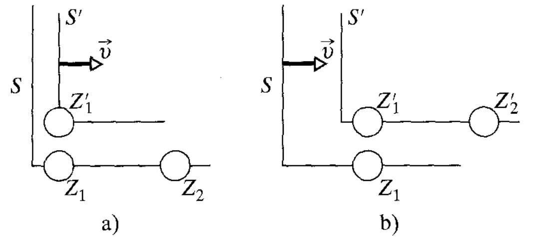
1. Statek A (rys. 38.16) wysyła impuls laserowy w kierunku zbliżającego się statku B, w tym samym czasie, kiedy statek zwiadowczy C się oddala. Wszystkie zaznaczone prędkości zostały zmierzone w tym samym układzie odniesienia. Uszereguj statki według wartości prędkości impulsu (zaczynając od największej) zmierzonej z ich pokładów.



Rys. 38.16. Pytania 1 i 7

2. Na rysunku 38.17a przedstawiono dwa zegary w nieruchomym układzie odniesienia S (w układzie tym zegary są ze sobą zsynchronizowane) oraz jeden zegar w poruszającym się układzie S'. Zegary Z_1 i Z'_1 mijając się, wskazują zero. Nieco później mijają się zegary Z'_1 i Z_2. a) Który z nich wskaże wtedy wcześniejszą chwilę i b) który mierzy czas własny?

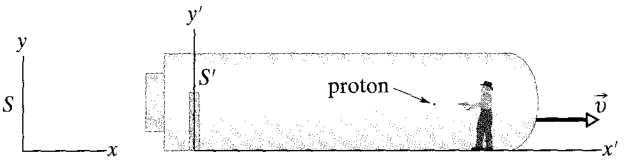
3. Na rysunku 38.17b przedstawiono dwa zegary w nieruchomym układzie odniesienia S' (w układzie tym zegary są ze sobą zsynchronizowane) oraz jeden zegar w poruszającym się układzie S. Zegary Z_1 i Z'_1 mijając się, wskazują zero. Nieco później mijają się zegary Z_1 i Z'_2. a) Który z nich wskaże wtedy wcześniejszą chwilę i b) który mierzy czas własny?



Rys. 38.17. Pytania 2 i 3

4. Jacek opuszcza Wenus na pokładzie statku udającego się na Marsa i mija przebywającą na Ziemi Agatę z prędkością względną $0{,}5c$. a) Jacek i Agata mierzą czas trwania podróży z Wenus na Marsa. Kto mierzy czas własny — Jacek, Agata czy może żadne z nich? b) W trakcie podróży Jacek wysyła w kierunku Marsa impuls świetlny. Jacek i Agata mierzą czas podróży impulsu. Kto z nich mierzy czas własny?

5. Na rysunku 38.18 przedstawiono statek (z jego pokładem jest związany układ odniesienia S'), który mija nas (układ odniesienia S). Na statku wystrzelono proton, który porusza się z prędkością bliską prędkości światła wzdłuż statku od części przedniej do tylnej. a) Czy odległość przestrzenna $\Delta x'$ między miejscem wystrzelenia protonu a miejscem jego trafienia w ścianę statku ma wartość dodatnią, czy ujemną? b) Czy odstęp czasu $\Delta t'$ dzielący obydwa te zdarzenia ma wartość dodatnią, czy ujemną?

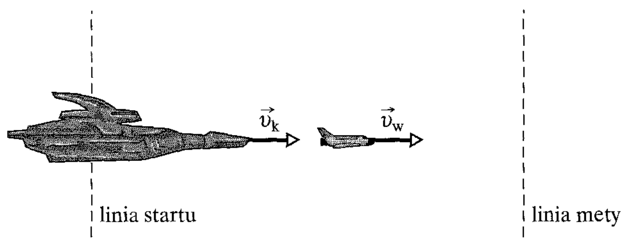


Rys. 38.18. Pytanie 5

6. Wyobraź sobie, że obserwator w układzie S' (rys. 38.9) stwierdza, że dwa zdarzenia zaszły w tym samym miejscu (powiedzmy w punkcie x'), ale w różnym czasie. Czy jest możliwe, aby obserwator w układzie S również stwierdził, że zdarzenia te zaszły w tym samym miejscu? b) Pewien obserwator stwierdza, że dwa zdarzenia zaszły jednocześnie i w tym samym miejscu. Czy wszyscy obserwatorzy stwierdzą, że zdarzenia te są jednoczesne? c) Czy wszyscy obserwatorzy stwierdzą, że zaszły one w tym samym miejscu?

7. Statki A i B (rys. 38.16) poruszają się naprzeciw siebie po jednej linii. Podane na rysunku prędkości zostały zmierzone w tym samym układzie odniesienia. Czy prędkość statku A względem statku B jest większa niż $0{,}7c$, mniejsza niż $0{,}7c$, czy równa $0{,}7c$?

8. Na rysunku 38.19 przedstawiono jeden z czterech krążowników gwiezdnych, które uczestniczą w wyścigu. Gdy krążowniki mijają linię startu, od każdego z nich oddziela się mały wahadłowiec, który mknie do mety. Wyobraź sobie, że pełnisz funkcję sędziego i znajdujesz się w spoczynku względem linii startu i mety. Prędkości v_k krążowników mierzone względem ciebie i prędkości v_w wahadłowców mierzone względem statku macierzystego wynoszą odpowiednio: 1) $0{,}7c$ i $0{,}4c$, 2) $0{,}4c$ i $0{,}7c$, 3) $0{,}2c$ i $0{,}9c$ oraz 4) $0{,}5c$ i $0{,}6c$. a) Nie wykonując pisemnych obliczeń, uszereguj wahadłowce według ich prędkości względem ciebie, zaczynając od największej wartości. b) Nie wykonując pisemnych obliczeń, uszereguj wahadłowce według odległości, jakie zmierzą ich piloci od linii startu do linii mety, zaczynając od największej uzyskanej wartości. c) Każdy z krążowników wysyła do swojego wahadłowca sygnał o pewnej częstości ν_0 mierzonej na pokładzie krążownika. Nie przeprowadzając pisemnych obliczeń, uszereguj wahadłowce według częstości, jaką zaobserwują ich załogi, począwszy od największej wartości.



Rys. 38.19. Pytanie 8

9. Wyobraź sobie, że na pokładzie statku kosmicznego odbierasz sygnały pochodzące z czterech wahadłowców, które po linii prostej albo zbliżają się do ciebie, albo się oddalają. Wszystkie sygnały mają taką samą częstość własną ν_0. Wartości i kierunki prędkości wahadłowców (zmierzone względem ciebie) wynoszą: a) $0{,}3c$, zbliża się, b) $0{,}6c$, zbliża się, c) $0{,}3c$, oddala się, d) $0{,}6c$, oddala się. Uszereguj wahadłowce według częstości, którą odbierasz, zaczynając od największej wartości.

10. Energia spoczynkowa i energia całkowita trzech cząstek, wyrażona jako wielokrotność pewnej wielkości A wynosi odpowiednio: 1) A, $2A$; 2) A, $3A$; 3) $3A$, $4A$. Nie wykonując pisemnych obliczeń, uporządkuj cząstki według: a) masy, b) energii kinetycznej, c) czynnika Lorentza i d) prędkości, za każdym razem zaczynając od największej wartości.

Zadania

www Rozwiązanie jest dostępne na stronie internetowej podręcznika: http://www.wiley.com/college/hrw
ilw Rozwiązanie jest dostępne w postaci interaktywnej, wykorzystującej oprogramowanie Interactive LearningWare (na tej samej stronie)

38.2 Postulaty

1. Układ odniesienia związany z laboratorium, nawet jeżeli pominąć ruch obrotowy i orbitalny Ziemi, nie jest dokładnie układem inercjalnym, ponieważ umieszczona w nim spoczywająca cząstka nie będzie pozostawać w spoczynku, lecz zacznie spadać. Często jednak zdarzenia zachodzą tak szybko, że można zaniedbać przyspieszenie grawitacyjne i uznać taki układ za inercjalny. Jako przykład rozważmy elektron poruszający się z prędkością $0{,}992c$, który wchodzi poziomo do znajdującej się w laboratorium komory. W jej wnętrzu elektron pokonuje odległość 20 cm. a) Jak długo będzie trwać podróż elektronu w komorze? b) Jaką drogę w kierunku pionowym przebędzie w tym czasie elektron? Czy w tym przypadku można byłoby uznać laboratorium za inercjalny układ odniesienia?

2. Jaki ułamek prędkości światła stanowią podane dalej prędkości (jaką wartość ma parametr β)? a) Typowa prędkość dryfu kontynentów (3 cm/rok). b) Maksymalna prędkość na autostradzie (90 km/h). c) Prędkość samolotu naddźwiękowego o liczbie Macha 2,5 (1200 km/h). d) Prędkość ucieczki ciał z powierzchni Ziemi. e) Typowa prędkość oddalania się odległego kwazara ($3 \cdot 10^4$ km/s).

38.5 Względność czasu

3. Zmierzony średni czas życia spoczywających mionów wynosi 2,2 μs. Zmierzono też, że średni czas życia prędkich mionów w obserwowanej na Ziemi wiązce promieniowania kosmicznego jest równy 16 μs. Oblicz, jaką prędkość względem Ziemi mają miony w wiązce promieniowania kosmicznego.

4. Jaką wartość ma parametr β, jeżeli współczynnik Lorentza γ jest równy a) 1,01, b) 10, c) 100 i d) 1000?

5. Nietrwała cząstka o dużej energii pozostawiła w detektorze ślad o długości 1,05 mm, a następnie uległa rozpadowi. Prędkość cząstki względem detektora wynosi $0{,}992c$. Ile wynosi własny czas życia cząstki, to znaczy, jak długo żyłaby cząstka spoczywająca względem detektora? ilw

6. Wyobraź sobie, że chcesz odbyć wycieczkę statkiem kosmicznym. W trakcie podróży będziesz przez 6 miesięcy oddalać się od Ziemi, poruszając się ze stałą prędkością po linii prostej, a następnie wracać z taką samą stałą prędkością. Chciałbyś, aby Ziemia w chwili twojego powrotu była o 1000 lat starsza. a) Z jaką prędkością powinieneś podróżować? b) Czy ważne jest, aby podróż odbywała się po linii prostej? Załóżmy, że podróżujesz przez rok po okręgu. Czy w chwili powrotu również okaże się, że zegary umieszczone na Ziemi odmierzyły 1000 lat?

38.6 Względność długości

7. Pręt równoległy do osi x układu odniesienia S porusza się wzdłuż tej osi z prędkością $0{,}63c$. Jego długość spoczynkowa wynosi 1,7 m. Jaką długość zmierzy obserwator w układzie odniesienia S?

8. Elektron, którego prędkość wyraża parametr $\beta = 0{,}999\,987$, porusza się wzdłuż osi rury próżniowej, której długość zmierzona przez spoczywającego względem niej obserwatora S wynosi 3 m. Obserwator S', który spoczywa względem elektronu, twierdzi, że rura porusza się względem niego z prędkością v $(= \beta c)$. Jaką długość rury zmierzy obserwator S'?

9. Pręt o długości 1 m w układzie S' tworzy kąt 30° z osią x'. Załóżmy, że układ S' porusza się równolegle do osi x układu odniesienia S z prędkością względną $0{,}9c$. Jaką długość pręta zmierzy obserwator spoczywający w układzie S?

10. Długość statku kosmicznego zmierzona przez pewnego obserwatora jest równa dokładnie połowie jego długości spoczynkowej. a) Ile wynosi prędkość (w jednostkach c) statku względem obserwatora dokonującego pomiaru? b) Ile razy wolniej biegnie czas odmierzany przez zegary umieszczone na statku niż czas odmierzany przez zegary w układzie związanym z obserwatorem prowadzącym pomiar?

11. Rakieta o długości 130 m mija stację pomiaru czasu z prędkością $0{,}74c$. a) Jaką długość rakiety zmierzy obserwator znajdujący się na stacji? b) Jaki odstęp czasu między minięciem stacji przez początek i koniec rakiety zmierzy zegar umieszczony na stacji?

12. a) Czy jest możliwe, aby człowiek w przeciętnym czasie swojego życia mógł przebyć odległość dzielącą Ziemię od środka Galaktyki równą około 23 000 lat świetlnych? Uzasadnienie poprzyj argumentami odwołującymi się do dylatacji czasu i skrócenia długości. b) Jaką stałą prędkość trzeba by rozwinąć, aby podróż trwała 30 lat (według czasu własnego)?

13. Kosmiczny obieżyświat wyrusza z Ziemi z prędkością $0{,}99c$ w kierunku gwiazdy Wega znajdującej się w odległości 26 lat świetlnych. Jaki czas odmierzą zegary umieszczone na Ziemi do chwili, a) kiedy podróżnik osiągnie cel podróży i b) kiedy na Ziemię dotrze jego wiadomość o tym zdarzeniu? c) Ile wynosi czas podróży na Wegę obliczony przez obserwatorów na Ziemi w układzie odniesienia podróżnika? www

38.8 Kilka wniosków z równań Lorentza

14. Obserwator S stwierdza, że zdarzenie nastąpiło na osi x jego układu odniesienia w punkcie $x = 3 \cdot 10^8$ m i w chwili $t = 2{,}5$ s. a) Obserwatorka w układzie S' porusza się wraz ze swoim układem w dodatnim kierunku osi x z prędkością $0{,}4c$. Początki obydwu układów odniesienia pokrywają się ($x = x' = 0$) w chwili $t = t' = 0$. Jakie współrzędne zdarzenia poda obserwatorka S'? b) Jakie współrzędne podałaby obserwatorka, gdyby poruszała się w *ujemnym* kierunku osi x z taką samą prędkością?

15. Obserwator S twierdzi, że współrzędne pewnego zdarzenia są równe

$$x = 100 \text{ km} \quad \text{i} \quad t = 200\ \mu\text{s}.$$

Jakie są współrzędne tego zdarzenia w układzie S', który porusza się względem S w dodatnim kierunku osi x z prędkością $0{,}95c$? Przyjmij, że w chwili $t = t' = 0$ mamy $x = x' = 0$.

16. Układ inercjalny S' porusza się z prędkością $0{,}6c$ względem układu odniesienia S (rys. 38.9). Początki obydwu układów odniesienia pokrywają się ($x = x' = 0$) w chwili $t = t' = 0$. Rejestrujemy dwa zdarzenia. W układzie S zdarzenie 1 zachodzi w początku układu w chwili $t = 0$, a zdarzenie 2 — na osi x w punkcie o współrzędnej $x = 3$ km i w chwili $t = 4\ \mu$s. Jakie współrzędne czasowe obydwu tych zdarzeń poda obserwator S'? Wyjaśnij różnicę w kolejności zdarzeń w różnych układach.

17. Eksperymentator wyzwala jednocześnie dwie lampy błyskowe, czego skutkiem jest silny błysk w początku jego układu współrzędnych oraz słaby błysk w odległości $x = 30$ km. Obserwator poruszający się z prędkością $0{,}25c$ w dodatnim kierunku osi x również widzi błyski. a) Jaki jest według niego odstęp czasu między błyskami? b) Który błysk według obserwatora nastąpił wcześniej? www

18. Obserwator S widzi silny błysk w odległości 1200 m i słaby błysk w odległości o 720 m mniejszej, dokładnie w kierunku silnego błysku. Stwierdza on ponadto, że silny błysk był pierwszy, a odstęp czasu między obydwoma błyskami wyniósł 5 μs. Ile wynosi względna prędkość $\vec{v}$ (podaj wartość i kierunek) obserwatora S', który stwierdził, że w jego układzie odniesienia obydwa błyski nastąpiły w tym samym miejscu? b) Który błysk według obserwatora S' nastąpił pierwszy? c) Jaki odstęp czasu między błyskami zmierzył obserwator S'?

19. Zegar poruszający się wzdłuż osi x z prędkością $0{,}6c$ wskazywał zero w chwili przejścia przez początek układu współrzędnych. a) Oblicz współczynnik Lorentza dla zegara. b) Jaki czas wskaże zegar, mijając punkt $x = 180$ m? www

20. Obserwator S widzi dwa błyski w takich samych położeniach, jak w zadaniu 18, ale tym razem w krótszym odstępie czasu. Ile musiałby wynosić najmniejszy możliwy odstęp czasu między błyskami w układzie S, aby obserwator S' mógł stwierdzić, że nastąpiły one w tym samym miejscu?

38.9 Względność prędkości

21. Cząstka porusza się wzdłuż osi x' układu S' z prędkością $0{,}4c$. Układ S' porusza się z prędkością $0{,}6c$ względem układu S. Jaką prędkość cząstki zmierzy obserwator w układzie S?

22. Układ S' porusza się względem układu S z prędkością $0{,}62c$ w dodatnim kierunku osi x. Prędkość pewnej cząstki zmierzona w układzie S' wynosi $0{,}47c$ i ma dodatni kierunek osi x'. a) Ile wynosi prędkość tej cząstki względem układu S? Ile wynosiłaby prędkość cząstki względem układu S, gdyby w układzie S' poruszała się ona z prędkością $0{,}47c$ w *ujemnym* kierunku osi x'? W obydwu przypadkach porównaj uzyskane wyniki z przewidywaniami nierelatywistycznych równań na składanie prędkości.

23. Galaktyka A oddala się od nas z prędkością $0{,}35c$. Galaktyka B, która znajduje się dokładnie w przeciwnym kierunku, oddala się od nas z tą samą prędkością. Jaką prędkość oddalania się zmierzy obserwator znajdujący się w galaktyce A a) dla naszej Galaktyki i b) dla galaktyki B?

24. Na podstawie pomiarów przesunięcia ku czerwieni światła docierającego z kwazara Q_1 stwierdzono, że oddala się on od nas z prędkością $0{,}8c$. Kwazar Q_2 leżący dokładnie w tym samym kierunku, lecz w mniejszej odległości, oddala się od nas z prędkością $0{,}4c$. Jaką prędkość kwazara Q_2 zmierzy obserwator związany z kwazarem Q_1?

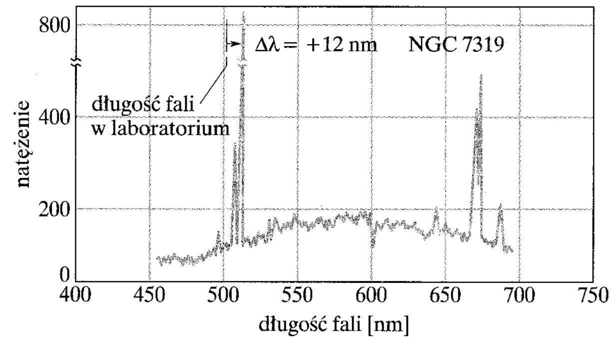
25. Rakieta o długości spoczynkowej 350 m porusza się w pewnym układzie odniesienia z prędkością $0{,}82c$. Wzdłuż niej, dokładnie w przeciwnym kierunku przelatuje meteoroid, którego prędkość również wynosi $0{,}82c$. Jak długo, według obserwatora związanego z rakietą, meteoroid będzie mijać rakietę? ilw www

26. Armada statków kosmicznych rozciągająca się na długości 1 roku świetlnego (w jej układzie spoczynkowym) porusza się z prędkością $0{,}8c$ względem stacji naziemnej S. Ze statku znajdującego się na końcu wyrusza w stronę czoła armady kurier lecący z prędkością $0{,}95c$ zmierzoną względem stacji S. Jak długo będzie trwać podróż kuriera według zegara a) w układzie spoczynkowym kuriera, b) w układzie spoczynkowym armady, c) znajdującego się na stacji S?

38.10 Zjawisko Dopplera dla światła

27. Statek kosmiczny oddalający się od Ziemi z prędkością $0{,}9c$ nadaje komunikaty na częstości 100 MHz (w układzie odniesienia statku). Na jaką częstość należy nastroić odbiornik na Ziemi, aby móc odbierać te komunikaty?

28. Na rysunku 38.20 pokazano, jak natężenie światła docierającego na Ziemię z galaktyki NGC 7319 położonej w odległości około $3 \cdot 10^8$ lat świetlnych zależy od długości fali. W widmie dominuje linia emisyjna tlenu. W laboratorium odpowiada jej długość fali $\lambda = 513$ nm, ale w widmie obserwowanym dla galaktyki NGC 7319 w wyniku zjawiska Dopplera odpowiada jej długość fali 525 nm (całe widmo emisyjne galaktyki NGC 7319 jest przesunięte). a) Ile wynosi radialna prędkość galaktyki NGC 7319 względem Ziemi? b) Czy galaktyka ta zbliża się, czy oddala od naszej planety?



Rys. 38.20. Zadanie 28

29. Stwierdzono, że długość fali pewnych linii w widmie galaktyki z gwiazdozbioru Panny jest o 0,4% większa niż w warunkach laboratoryjnych. Ile wynosi radialna składowa prędkości tej galaktyki względem Ziemi? Czy galaktyka ta zbliża się, czy oddala?

30. Oblicz, zakładając, że spełnione jest równanie (38.33), z jaką prędkością trzeba by jechać przez skrzyżowanie, aby światło czerwone zobaczyć jako zielone? Przyjmij, że barwie czerwonej odpowiada długość fali 620 nm, a zielonej 540 nm.

31. Statek kosmiczny oddala się od Ziemi z prędkością $0{,}2c$. Pasażerowie widzą, że lampa na końcu statku wysyła światło barwy niebieskiej ($\lambda = 450$ nm). Jaka będzie barwa światła widzianego przez obserwatora na Ziemi? ilw www

38.12 Nowe spojrzenie na energię

32. Jaką pracę trzeba wykonać, aby spoczywającemu elektronowi nadać prędkość: a) $0{,}5c$, b) $0{,}99c$ i c) $0{,}999c$?

33. Oblicz wartość parametru β i współczynnika Lorentza γ dla elektronu, którego energia kinetyczna wynosi: a) 1 keV, b) 1 MeV, c) 1 GeV.

34. Oblicz wartość parametru β i współczynnika Lorentza γ dla cząstki, której energia kinetyczna wynosi 10 MeV, jeżeli jest ona: a) elektronem, b) protonem i c) cząstką α?

35. Ile wynosi prędkość elektronu (w jednostkach c), jeżeli jego energia kinetyczna wynosi 100 MeV?

36. Stwierdzono, że masy cząstek uczestniczących w reakcji

$$\mathrm{p} + {}^{19}\mathrm{F} \rightarrow \alpha + {}^{16}\mathrm{O}$$

są z dużą dokładnością równe:

$$m(\mathrm{p}) = 1{,}007825\ \mathrm{u}, \qquad m(\alpha) = 4{,}002603\ \mathrm{u},$$
$$m(\mathrm{F}) = 18{,}998405\ \mathrm{u}, \qquad m(\mathrm{O}) = 15{,}9949\ \mathrm{u}.$$

Korzystając z tych danych, oblicz energię reakcji Q.

37. Uważa się, że kwazary to jądra aktywnych galaktyk na wczesnym etapie ich powstawania. Moc emitowana przez typowy kwazar wynosi 10^{41} W. Z jaką szybkością ubywa masa kwazara, który wypromieniowuje taką energię? Podaj wynik, przyjmując za jednostkę masę Słońca na rok (masa Słońca M_S jest równa $2\cdot 10^{30}$ kg).

38. Jaką pracę trzeba wykonać, aby zwiększyć prędkość elektronu a) od $0{,}18c$ do $0{,}19c$ i b) od $0{,}98c$ do $0{,}99c$? Zwróć uwagę, że w obydwu przypadkach prędkość wzrasta o $0{,}01c$.

39. Pewna cząstka o masie m ma pęd o wartości mc. Ile wynosi: a) prędkość cząstki, b) jej współczynnik Lorentza i c) energia kinetyczna cząstki?

40. Ile wynosi prędkość cząstki, której a) energia kinetyczna jest dwukrotnie większa od jej energii spoczynkowej i b) energia całkowita jest dwukrotnie większa od jej energii spoczynkowej?

41. Jaki pęd musi mieć cząstka o masie m, aby jej energia całkowita była trzy razy większa od energii spoczynkowej? ilw

42. a) Jeżeli można wyznaczyć energię kinetyczną E_k cząstki i jej pęd p, to powinno być możliwe obliczenie masy cząstki, a tym samym jej identyfikacja. Wykaż, że

$$m = \frac{(pc)^2 - E_k^2}{2E_k c^2}.$$

b) Udowodnij, że podane wyrażenie można sprowadzić do dobrze znanej postaci, kiedy $u/c \rightarrow 0$, gdzie u oznacza prędkość cząstki. c) Oblicz masę cząstki, której energia kinetyczna wynosi 55 MeV, a pęd 121 MeV/c. Podaj wynik jako wielokrotność masy elektronu m_e.

43. Tabletka aspiryny ma masę 320 mg. Ile kilometrów można by przejechać samochodem, korzystając z energii równoważnej tej masie? Przyjmij, że 1 litr benzyny pozwala przejechać 12,75 km, a ciepło spalania benzyny używanej w samochodach wynosi $3{,}65\cdot 10^7$ J/l.

44. Średni czas życia spoczywających mionów wynosi 2,2 μs. Pomiary wykonane w laboratorium dla wiązki mionów z akceleratora cząstek wykazały, że średni czas życia mionów wynosi 6,9 μs. Ile wynosi w układzie związanym z laboratorium: a) prędkość mionów, b) ich energia kinetyczna i c) pęd? Masa mionu jest 207 razy większa od masy elektronu.

45. W zderzeniu wysokoenergetycznej cząstki promieniowana kosmicznego z pewną cząstką na wysokości 120 km nad poziomem morza powstał pion. Porusza się on pionowo w dół, a jego całkowita energia E wynosi $1{,}35\cdot 10^5$ MeV. Pion w swoim układzie spoczynkowym rozpadł się po 35 ns od chwili powstania. Na jakiej wysokości nad poziomem morza — według pomiaru w układzie związanym z Ziemią — nastąpił rozpad pionu? Energia spoczynkowa pionu wynosi 139,6 MeV. www

46. W paragrafie 29.5 wykazaliśmy, że cząstka o ładunku q i masie m poruszająca się prostopadle do kierunku jednorodnego pola magnetycznego o indukcji B biegnie po okręgu o promieniu r danym przez równanie (29.16):

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Wykazaliśmy także, że okres T obiegu okręgu nie zależy od prędkości cząstki. Uzyskane wyniki są prawdziwe tylko pod warunkiem, że $v \ll c$. W przypadku cząstek poruszających się z prędkościami bliskimi c promień toru można obliczyć ze wzoru

$$r = \frac{p}{qB} = \frac{\gamma mv}{qb} = \frac{mv}{qB\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Równanie to obowiązuje dla dowolnych prędkości. Oblicz promień toru elektronu o energii 10 MeV poruszającego się prostopadle do kierunku jednorodnego pola magnetycznego o indukcji 2,2 T, korzystając ze wzoru a) nierelatywistycznego i b) relatywistycznego. c) Oblicz okres obiegu okręgu $T = 2\pi r/v$, korzystając z relatywistycznego wzoru na promień r. Czy uzyskany wynik nie zależy od prędkości elektronu?

47. Badania jonizacji wykazały, że pewne lekkie jądro ma ładunek $2e$ i porusza się z prędkością $0{,}71c$. Promień krzywizny jego toru w polu magnetycznym o indukcji 1 T wynosi 6,28 m. (Jądro porusza się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola). Oblicz masę jądra i dokonaj jego identyfikacji. [*Wskazówka*: Lekkie jądra są zbudowane z podobnej liczby neutronów (które nie mają ładunku) i protonów (które mają ładunek $+e$). Przyjmij, że masa każdej z tych cząstek jest równa 1 u. Skorzystaj też z zadania 46].

48. Proton o energii 10 GeV pochodzący z promieniowania kosmicznego porusza się w polu magnetycznym Ziemi o indukcji $\vec{B}$ z prędkością $\vec{v}$ skierowaną prostopadle do $\vec{B}$, w obszarze, w którym średnia wartość indukcji wynosi 55 μT. Ile wynosi promień krzywizny toru protonu w tym obszarze? (Patrz zadanie 46).

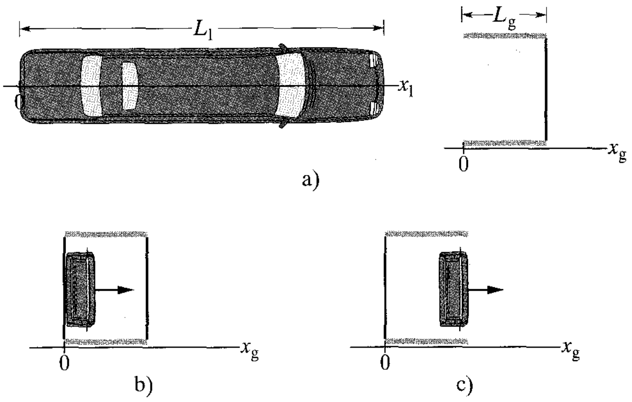
49. Elektron o energii 2,5 MeV porusza się prostopadle do kierunku pola magnetycznego po torze o promieniu krzywizny 3 cm. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego B? (Patrz zadanie 46).

50. Synchrotron w laboratorium im. Fermiego przyspiesza protony, nadając im energię kinetyczną 500 GeV. Przy tak dużej energii efektów relatywistycznych nie można pominąć. W szczególności wraz ze wzrostem prędkości protonu czas potrzebny na pokonanie kołowej orbity w synchrotronie także wzrasta. W cyklotronie, w którym indukcja pola magnetycznego i częstość generatora mają stałe wartości, efekt wynikający z dylatacji czasu sprawiłby, że zanikłaby synchronizacja między czasem obiegu orbity przez proton a częstością generatora, zatem nie następowałoby przyspieszenie protonu przy kolejnych przejściach przez szczelinę i proton nie osiągnąłby energii 500 GeV. W synchrotronie zmienia się zarówno indukcja pola magnetycznego, jak i częstość generatora, tak aby efekt dylatacji czasu skompensować. Oblicz wartość: a) współczynnika Lorentza γ, b) parametru β i c) indukcji pola magnetycznego B dla protonu o energii 500 GeV poruszającego się po orbicie o promieniu 750 m. (Patrz zadanie 46; przyjmij, że energia spoczynkowa protonu jest równa 938,8 MeV).

51*. Cząstka α o energii kinetycznej 7,7 MeV zderza się ze spoczywającym jądrem ^{14}N. W wyniku reakcji powstaje jądro ^{17}O i proton. Tor protonu o energii kinetycznej 4,44 MeV tworzy kąt 90° z torem padającej cząstki α. Masy cząstek uczestniczących w reakcji są równe: 4,00260 u — cząstka α; 14,00307 u — jądro ^{14}N; 1,007825 u — proton; 16,99914 u — jądro ^{17}O. Jaka jest wartość (w MeV) a) energii kinetycznej jądra tlenu i b) energii reakcji Q? (*Wskazówka*: Prędkości cząstek są dużo mniejsze od wartości c).

Zadania dodatkowe

52. *Samochód w garażu.* Pewien samochodziarz kupił najdłuższą limuzynę świata, której długość własna L_l wynosi 30,5 m. Na rysunku 38.21a pokazano samochód zaparkowany przed garażem o długości własnej L_g równej 6 m. Garaż ma bramę wjazdową (na rysunku otwartą) i wyjazdową (na rysunku zamkniętą). Nie ulega wątpliwości, że limuzyna jest dłuższa niż garaż. Właściciel garażu, który wie co nieco na temat relatywistycznego skrócenia długości, zakłada się z właścicielem limuzyny, że może się ona zmieścić w garażu przy obydwu zamkniętych bramach. Samochodziarz, który zakończył naukę fizyki, nie zaznajamiając się w ogóle z teorią względności, twierdzi, że coś takiego jest z gruntu niemożliwe.



Rys. 38.21. Zadanie 52

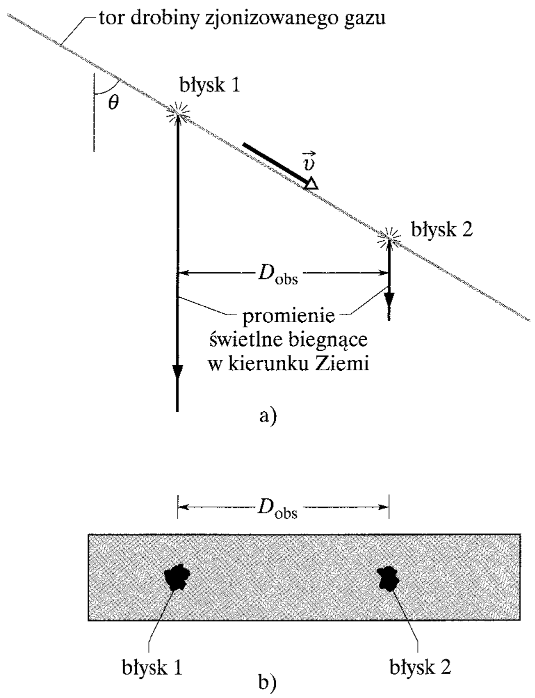
Aby prześledzić rozumowanie właściciela garażu, zwiążmy oś x_l z limuzyną tak, aby jej początek $x_l = 0$ pokrywał się z jej tylnym zderzakiem. Oś x_g zwiążemy z garażem tak, aby punkt $x_g = 0$ pokrywał się z przednią (otwartą) bramą. Właściciel limuzyny ma jechać nią na wprost bramy wjazdowej z prędkością $0{,}998c$ (co jest oczywiście niemożliwe ze względów technicznych i finansowych).

Właściciel limuzyny spoczywa w układzie odniesienia związanym z osią x_l, a właściciel garażu w układzie związanym z osią x_g.

Musimy rozważyć dwa zdarzenia: *Zdarzenie 1.* Kiedy tylny zderzak samochodu mija bramę wjazdową, ta jest zamykana. Przyjmijmy, że zarówno właściciel limuzyny, jak i właściciel garażu przypisują temu zdarzeniu czas równy zeru $t_{g1} = t_{l1} = 0$. Zdarzenie nastąpiło w punkcie $x_l = x_g = 0$. Na rysunku 38.21b przedstawiono zdarzenie 1 z punktu widzenia układu odniesienia x_g. *Zdarzenie 2.* Kiedy przedni zderzak limuzyny dociera do bramy wyjazdowej, ta otwiera się. Na rysunku 38.21c przedstawiono zdarzenie 2 z punktu widzenia układu odniesienia x_g. a) Jaka jest długość limuzyny oraz b) jakie są współrzędne czasoprzestrzenne x_{g2} i t_{g2} zdarzenia 2 według właściciela garażu? c) Jak długo limuzyna przebywa w garażu, gdy zamknięte są obydwie jego bramy?

Rozważmy teraz sytuację z punktu widzenia układu x_l, w którym garaż „przejeżdża" przez samochód z prędkością $-0{,}998c$. Ile wynoszą, według właściciela limuzyny d) długość garażu oraz e) współrzędne czasoprzestrzenne x_{l2} i t_{l2} zdarzenia 2? f) Czy w pewnej chwili cała limuzyna mieści się w garażu, którego obydwie bramy są zamknięte i g) które zdarzenie zachodzi pierwsze? h) Naszkicuj zdarzenia 1 i 2 tak, jak widzi je właściciel limuzyny. (Czy istnieje związek przyczynowy między obydwoma zdarzeniami, to znaczy, czy jedno zdarzenie jest przyczyną drugiego?) i) Kto wygrał zakład?

53. *Strumienie nadświetlne.* Na rysunku 38.22a przedstawiono szkic toru drobiny materii w strumieniu zjonizowanego gazu wyrzucanego przez galaktykę. Drobina porusza się ze stałą prędkością $\vec{v}$ pod kątem θ do kierunku obserwacji z Ziemi. Drobina co pewien czas emituje błyski światła, które mogą być obserwowane na Ziemi. Dwa błyski zaznaczone na rysunku 38.22a dzieli odstęp czasu t zmierzony w spoczywającym układzie odniesienia w pobliżu źródła błysków. Na rysunku 38.22b pokazano, jak wyglądałyby obydwa błyski sfotografowane na jednym kawałku kliszy — najpierw do Ziemi dociera światło z błysku oznaczonego jako 1, a następnie z błysku 2. Odległość D_{obs} to przemieszczenie tej drobiny w polu widzenia znajdującego się na Ziemi obserwatora. T_{obs} oznacza różnicę między czasem dotarcia na Ziemię światła z obydwu błysków. Obserwowana prędkość jest więc równa $v_{obs} = D_{obs}/T_{obs}$. Wyraź a) D_{obs} i b) T_{obs} za pomocą wielkości v, t i θ. c) Oblicz wartość v_{obs} dla $v = 0{,}98c$ i $\theta = 30^\circ$. Kiedy po raz pierwszy zaobserwowano w ten sposób strumienie gazu poruszające się pozornie szybciej niż światło, wydawało się, że leży to w sprzeczności ze szczególną teorią względności. Sprawa wyjaśniła się, gdy właściwie zinterpretowano geometrię obserwacji przedstawioną na rysunku 38.22a.



Rys. 38.22. Zadanie 53