POSTĘPY ASTRONOMII

Tom XXIX (1981), Zeszyt 2

FIGURY RÓWNOWAGI

Część III

FIGURY NIEJEDNORODNE

ANDRZEJ KRASIŃSKI

Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika PAN (Warszawa)

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ

Часть III

НЕОДНОРОДНЫЕ ФИГУРЫ

А. Красиньски

Содержание

В статьи показано два примера неоднородных фигур равновесия: тела с плотностью постоянную на подобных эллипсоидах и классу фигур Фэррэрса. Точнее обсуждено новый класс фигур найден автором (тела с плотностью постоянную на софокусных эллипсоидах). Эта конфигурация заметно представляет некоторые черты гравитационного поля Кэрра в общей теории относительности.

FIGURES OF EQUILIBRIUM

Part III

INHOMOGENEOUS FIGURES

Summary

Two examples of inhomogeneous figures of equilibrium are mentioned: the one in which density is constant on ellipsoids similar to the surface, and the Ferrers class of configurations. A new family of figures found recently by the author is discussed in more detail. These are perfect fluid bodies whose exterior and interior gravitational

potentials are constant on ellipsoids confocal to the ellipsoidal outer surface. The configuration remarkably reproduces some features of the Kerr gravitational field from general relativity theory.

Przypomnijmy na wstępie wyniki poprzednich części pracy, na które będziemy się tu powoływać.

We wzorach na potencjały grawitacyjne ciał o kształtach elipsoid pojawia się funkcja $\Delta = \Delta(u)$ dana wzorem:

$$\Delta^2 \overset{\text{def}}{=} (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u), \tag{15}$$

gdzie a_1, a_2, a_3 są półosiami elipsoidy.

Współrzędną elipsoidalną punktu P o współrzędnych kartezjańskich $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$, położonego na zewnątrz elipsoidy E o półosiach a_1, a_2, a_3, nazywamy wielkość λ, będącą największym pierwiastkiem równania:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda} = 1. \tag{49}$$

Równanie λ = const. opisuje zbiór punktów $\{x_i\}$ położonych na elipsoidzie współogniskowej z E.

T w i e r d z e n i e 5.

Potencjał powłoki elipsoidalnej o masie M i półosiach a_1, a_2, a_3 w punkcie $\{x_i\}$ na zewnątrz niej jest równy:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} G M \int_{\lambda}^{\infty} du/\Delta. \tag{48}$$

gdzie λ jest współrzędną elipsoidalną punktu $\{x_i\}$.

Potencjał powłoki elipsoidalnej E_b o półosiach b_1, b_2, b_3 w dowolnym punkcie (X, Y, Z) jest dany przez:

$$\mathcal{V} = \frac{G M}{2\pi b_1 b_2 b_3} \iiint_{V} [(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{-1/2} \times \\ \times \delta\left(\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{b_2^2} + \frac{z^2}{b_3^2} - 1\right) d_3x, \tag{38}$$

gdzie: $\mathcal{V}$ jest dowolnym obszarem zawierającym E_b całkowicie wewnątrz, zaś $\delta(\cdot)$ jest funkcją delta Diraca.

Potencjałem nazywamy tu umownie wielkość $\mathcal{V} = -V$, gdzie V jest właściwym potencjałem pola grawitacyjnego.

5. NIEJEDNORODNE FIGURY RÓWNOWAGI

Jednorodne figury równowagi były przykładami najprostszych modeli wirujących ciał. Modele te opisywały rzeczywiste kształty gwiazd i planet bardzo niedokładnie i miały znaczenie głównie teoretyczne, jako pierwszy krok na drodze do rozwiązań bardziej realistycznych. Następnym krokiem powinno być uwzględnienie faktu, że rzeczywiste obiekty astronomiczne są niejednorodne. Tu jednak trudności wzrastają skokowo, bowiem informacja o rozkładzie gęstości materii wewnątrz dowolnego obiektu jest niedostępna bezpośrednim pomiarom, a ponadto trzeba przy tym wyznaczyć doświadczalnie rozkład ciśnień, albo znać równanie stanu i wyznaczyć rozkład temperatur. Wszystkie te wymagania są bardzo trudne do spełnienia. Rozkłady ciśnienia, gęstości i temperatury można wyznaczyć tylko metodami pośrednimi, wprowadzającymi duże błędy. Wyniki trudno więc opisać jakąkolwiek funkcją analityczną, a bez tego trudno myśleć o ścisłym rozwiązywaniu równań Eulera i Poissona. W zasadzie te same trudności występują w przypadku konfiguracji sferycznie symetrycznych, które dla astrofizyki teoretycznej są obiektami dość swojskimi, lecz tam wszystkie wielkości zależą tylko od współrzędnej radialnej, mamy więc do czynienia z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, podczas gdy w przypadku ciał wirujących występują równania cząstkowe o co najmniej dwóch zmiennych. Zwiększa to równocześnie trudności rachunku i wymagania co do zakresu danych. Dlatego też ścisłe rozwiązania dla figur niejednorodnych były znajdowane raczej przez poszukiwanie przypadków, które dają się rozwiązać ze względu na szczególne własności analityczne, niż przez wybieranie sytuacji ciekawych i ważnych dla astrofizyki.

Podamy za Chandrasekharem (1969) dwa przykłady takich rozwiązań. Przypuśćmy, że gęstość materii wewnątrz ciała o kształcie elipsoidy jest stała na elipsoidach podobnych do zewnętrznej powierzchni, której półosie mają długość a_1, a_2, a_3. Punkt $\{x_i\}$ leży na elipsoidzie podobnej do zewnętrznej powierzchni, gdy:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} = m^2, \tag{66}$$

gdzie $0 \leqslant m \leqslant 1$, przy czym $m = 0$ odpowiada środkowi elipsoid, zaś $m = 1$ powierzchni zewnętrznej ciała. Jeśli jako współrzędne w przestrzeni wybierzemy dwie zmienne opisujące położenie punktu na elipsoidzie oraz zmienną m, to gęstość naszego obiektu będzie zależała tylko od m (wygodniej będzie traktować ją jako funkcję m^2), zaś potencjał na zewnątrz niego będzie dany wzorem:

$$\mathcal{V}_e = \pi G a_1 a_2 a_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\Delta} \int_{m^2(u)}^{1} \rho(m^2) d(m^2), \tag{67}$$

gdzie: Δ jest dane przez (15), λ przez (49), zaś $m^2(u)$ przez:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + u} = m^2. \tag{68}$$

Wzór (67) można łatwo wyprowadzić w oparciu o (48), podobną metodą jak dowód twierdzenia 6, pamiętając, że tym razem ρ nie jest stałe i, w ostatnim kroku, umiejętnie zamieniając kolejność całkowań. Rachunek ten jest podany u Chandrasekhara (1969).

Wprowadzając definicję:

$$\psi(m^2) = \int_1^{m^2} \rho(m'^2) d(m'^2) \tag{69}$$

można zamiast (67) napisać:

$$\mathcal{V}_e = \pi G a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty [\psi(1) - \psi(m^2(u))] \frac{du}{\Delta}. \tag{70}$$

Można też prosto znaleźć wyrażenie na potencjał wewnątrz takiego obiektu (Chandrasekhar 1969):

$$\mathcal{V}_i = \pi G a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty [\psi(1) - \psi(m^2(u))] \frac{du}{\Delta}. \tag{71}$$

Ważny teoretycznie jest przypadek szczególny rozkładu $\rho = \rho(m^2)$, gdy:

$$\rho(m^2) = C(1 - m^2)^n = C\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2}\right)^n, \tag{72}$$

gdzie C i $n > 0$ są stałymi dowolnymi. Wtedy:

$$\psi(m^2) = -\frac{C}{n+1}(1 - m^2)^{n+1}, \tag{73}$$

zaś potencjał w punkcie wewnętrznym jest dany przez:

$$\mathcal{V}_i = \pi G \frac{C}{n+1} a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty Q^{n+1} \frac{du}{\Delta}, \tag{74}$$

gdzie:

$$Q = 1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + u}. \tag{75}$$

Potencjał ten należy do nieco ogólniejszej klasy potencjałów badanych po raz pierwszy przez Ferrersa (1877), generowanych przez rozkłady gęstości postaci:

$$\rho(x_i) = C x^p y^q z^r, \tag{76}$$

gdzie (x, y, z) to współrzędne punktu w ciele; C, p, q, r — stałe dowolne. Potencjały

F e r r e r s a są ważne teoretycznie, ponieważ są one równe wyższym momentom potencjałów elipsoid jednorodnych, dla których istnieje ogólna teoria (C h a n d r a s e k h a r 1969). Nie będziemy ich omawiać dokładniej, bo musielibyśmy znów zagłębić się w dość zawikłane rachunki.

Zakończymy nasz przegląd nowym rozwiązaniem niejednorodnym, znalezionym ostatnio przez autora (K r a s i ń s k i 1980), które było motywowane możliwym związkiem z problemem istnienia źródła dla rozwiązania K e r r a (1963) w ogólnej teorii względności.

6. ZWIĄZEK FIGUR RÓWNOWAGI Z ROZWIĄZANIEM KERRA

Rozwiązanie Kerra opisuje, jak wiadomo, pole grawitacyjne na zewnątrz wirującej czarnej dziury. Problem jednak, czy źródłem tego pola może być j e d y n i e czarna dziura, czy może również jakaś skończona porcja „normalnej" materii, jest, mimo wielu prób, nadal nie rozwiązany (K r a s i ń s k i 1978). Pokazano, że źródłem dla pola Kerra mogą być rozmaite nietypowe ciała, np. ciecz doskonała otoczona „skorupką" o zerowej grubości i niezerowej powierzchniowej gęstości materii, albo ciecz nie spełniająca prawa Pascala: posiadająca anizotropowy rozkład ciśnień o przynajmniej jednej ujemnej wartości własnej. Przegląd nieudanych prób w tym kierunku zawiera cytowana już praca (K r a s i ń s k i 1978).

W tejże pracy autor pokazał, że geometria czasoprzestrzeni K e r r a sugeruje ścisły związek tego rozwiązania z newtonowskim polem grawitacyjnym, którego powierzchnie ekwipotencjalne są współogniskowymi elipsoidami. Argument był następujący: w rozwiązaniu K e r r a istnieje rodzina linii typu czasowego u o tej własności, że trójwymiarowe hiperpowierzchnie zbudowane z elementów lokalnie ortogonalnych do u okazują się być rodzinami współogniskowych elipsoid obrotowych. Dokładniej mówiąc, przestrzeń taka powstaje przez „nanizanie" współogniskowych elipsoid na ortogonalne do nich linie krzywe. Utworzona w ten sposób przestrzeń 3-wymiarowa jest krzywa, lecz jej krzywizna jest proporcjonalna do parametru m rozwiązania K e r r a równego masie źródła pola, a w granicy $m \to 0$ przestrzeń staje się płaska. W sensie geometrycznym zatem rozwiązanie K e r r a jest zbudowane ze współogniskowych elipsoid obrotowych w bardzo podobny sposób, jak rozwiązanie S c h w a r z s c h i l d a ze współśrodkowych sfer. Ponadto, w granicy $a \to 0$, elipsoidy z rozwiązania K e r r a degenerują się do sfer z rozwiązania S c h w a r z s c h i l d a. Ponieważ zaś sfery z rozwiązania S c h w a r z s c h i l d a odpowiadały, w granicy newtonowskiej, powierzchniom ekwipotencjalnym pola grawitacyjnego, można domniemywać, że elipsoidy z rozwiązania K e r r a odpowiadają również powierzchniom ekwipotencjalnym pewnego newtonowskiego pola grawitacyjnego.

Podane wyżej rozważania miały jedynie uzasadnić, dlaczego zająłem się opisanym dalej problemem. Jest to bowiem temat czysto newtonowski i można go rozpatrywać bez względu na związki z teorią względności.

7. ŹRÓDŁO POLA STAŁEGO NA WSPÓŁOGNISKOWYCH ELIPSOIDACH OBROTOWYCH

Zastanówmy się, jakie źródło rozciągłe przestrzennie może wytwarzać na zewnątrz potencjał, którego poziomice są współogniskowymi elipsoidami obrotowymi. Wiemy już, z części II pracy, że pole takie wytwarza powierzchniowa powłoka materii rozłożona na jednej z elipsoid. Potencjał ten jest dany wzorem (38). W przypadku elipsoid obrotowych spłaszczonych wygodnie jest wprowadzić współrzędne (r, ϑ, φ) związane z kartezjańskimi za pomocą następujących równań:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + a^2}\,\sin\vartheta\cos\varphi, \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2}\,\sin\vartheta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{77}$$

Widać, że spełnione są tożsamości:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \\ &\frac{x^2 + y^2}{a^2\sin^2\vartheta} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\vartheta} = 1, \\ &\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\varphi. \end{aligned} \tag{78}$$

Zatem powierzchnie r = const. są współogniskowymi elipsoidami o półosiach r i $\sqrt{r^2 + a^2}$, przy czym półoś r leży na osi symetrii, zaś a jest promieniem okręgu ogniskowego elipsoid. Powierzchnie ϑ = const. są hiperboloidami jednopowłokowymi, powierzchnie φ = const. – płaszczyznami przechodzącymi przez oś symetrii. Niech powłoka materialna leży na elipsoidzie $r = r_0$. Potencjał (38), przy $b_1 = b_2 = \sqrt{r_0^2 + a^2}$, $b_3 = r_0$ wyraża się we współrzędnych (77) następująco:

$$\begin{aligned} V_H = \frac{GM}{2\pi r_0(r_0^2 + a^2)} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1(\vartheta,\varphi)}^{r_2(\vartheta,\varphi)} (r^2 + a^2\cos^2\vartheta)\sin\vartheta d^{-1} \times \\ \times\, \delta((r_0^2 + a^2\cos^2\vartheta)(r^2 - r_0^2)/r_0^2(r_0^2 + a^2))dr, \end{aligned} \tag{79}$$

gdzie $r_1 < r_0 < r_2$ oraz:

$$\begin{aligned} d \overset{\text{def}}{=} [R^2 + r^2 - 2\sqrt{R^2 + a^2}\sqrt{r^2 + a^2}\sin\Theta\sin\vartheta\cos(\varphi - \Phi) \\ -2Rr\cos\Theta\cos\vartheta + a^2\sin^2\Theta + a^2\sin^2\vartheta]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{80}$$

przy czym (R, Θ, Φ) są współrzędnymi (77) punktu pola (X, Y, Z), zaś (r, ϑ, φ) – współrzędnymi bieżącego punktu całkowania. Wykonując w (79) całkę względem r dostajemy:

$$\mathcal{V}_H = \frac{GM}{4\pi} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta}{d} d\varphi \Big|_{r=r_0}. \tag{81}$$

Potencjał ten jest, jak sprawdzaliśmy w paragrafie 4, stały na powierzchniach R = const, tzn.:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_H}{\partial \Theta} = 0 = \frac{\partial \mathcal{V}_H}{\partial \Phi} \tag{82}$$

(sprawdzenie pierwszej z tych równości bezpośrednim rachunkiem jest trudnym ćwiczeniem, które można polecić pracowitemu Czytelnikowi. Druga równość jest oczywista).

Zastanówmy się teraz, jakim rozkładem ciągłym $\rho(r, \vartheta)$ można zastąpić wyrażenie $M\delta(\cdot)/2\pi r_0(r_0^2 + a^2)$ w (79), aby potencjał pozostał niezależny od Θ i Φ(zakładamy, że poszukiwana konfiguracja jest osiowo symetryczna w całym wnętrzu obiektu, toteż $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = 0$). Widać, że wykonanie całki względem r w (79) spowodowało skrócenie czynnika $(r^2 + a^2\cos^2\vartheta)$ pod całką, która pozostała do wykonania. Wystarczyło to do uzyskania wyniku niezależnego od Θ i Φ, a więc zależnego jedynie od R i r_0. Zatem biorąc rozkład postaci:

$$\rho(r, \vartheta) = \frac{f(r)}{r^2 + a^2\cos^2\vartheta}, \tag{83}$$

gdzie $f(r)$ jest dowolną funkcją zmiennej r, dostajemy zamiast (79):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_e &= G \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} f(r) \frac{\sin\vartheta}{d} dr = \\ &= G \int_0^{r_0} dr f(r) \Big[\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta}{d} d\varphi \Big]. \end{aligned} \tag{84}$$

Całka podwójna w nawiasie kwadratowym różni się od całki w (81) tylko zamianą r_0 na r, a wobec tego jest niezależna od Θ i Φ. Zatem w (84) $\mathcal{V}_e = \mathcal{V}_e(R)$.

8. POTENCJAŁ ZEWNĘTRZNY I WEWNĘTRZNY

Skoro całka po ϑ i φ w (84) nie zależy od Θ i Φ, to wystarczy obliczyć ją dla $\Theta = 0$, co jest łatwe. Dostajemy:

$$\mathcal{V}_e = \frac{GM}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{R}, \tag{85}$$

gdzie:

$$M \overset{\text{def}}{=} 4\pi \int_0^{r_0} f(r)dr. \tag{86}$$

Można sprawdzić, że potencjał dany przez (85) spełnia równanie Laplace'a $\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} = 0$, przy czym jest to jedyne rozwiązanie tego równania zależne tylko od R i spełniające warunki brzegowe $\mathcal{V} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ oraz $R^2 \frac{d\mathcal{V}}{dR} \xrightarrow[R\to\infty]{} -GM$.

Można też łatwo stwierdzić, że rozkład gęstości (83) daje współogniskowe elipsoidy jako powierzchnie ekwipotencjalne także wewnątrz badanego ciała. Wewnątrz mamy bowiem:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathcal{V}_i = -4\pi G\rho, \tag{87}$$

i jeśli $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i(r)$, to stąd:

$$\left[(r^2 + a^2)\frac{d^2\mathcal{V}_i}{dr^2} + 2r\frac{d\mathcal{V}_i}{dr}\right] \Big/ (r^2 + a^2\cos^2\vartheta) = -4\pi G\rho. \tag{88}$$

Widać więc, że równanie to ma rozwiązania tylko wtedy, gdy zachodzi (83). Rozwiązanie jest postaci:

$$\mathcal{V}_i = -\int_0^r \frac{4\pi G}{r'^2 + a^2} dr' \int_0^{r'} f(r'')\, dr'' + \mathcal{V}(0) - \mathcal{V}'(0)\operatorname{arctg}\frac{a}{r}. \tag{89}$$

Założymy, że $\mathcal{V}'(0) = 0$, tzn. że potencjał osiąga w środku elipsoidy maksimum. Stałą $\mathcal{V}(0)$ natomiast należy dobrać tak, aby $\mathcal{V}_i(r_0) = \mathcal{V}_e(r_0)$.

Zauważmy, że na podstawie (86) można (89) napisać w postaci:

$$\mathcal{V}_i = -\int_0^r \frac{G\,M(r')}{r'^2 + a^2} dr' + \mathcal{V}(0). \tag{90}$$

gdzie $M(r')$ jest masą zawartą wewnątrz elipsoidy o mniejszej półosi r'.

W ten sposób określiliśmy całkowicie rozkład gęstości masy i rozkład potencjału w przestrzeni. Pozostało nam jeszcze rozwiązanie równań Eulera dla określenia rozkładu ciśnienia i rozkładu prędkości kątowej. W naszym przypadku równania Eulera nie dadzą się scałkować analitycznie, ale można łatwo udowodnić, że rozwiązanie istnieje.

9. ROZKŁADY GĘSTOŚCI, CIŚNIENIA I PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ

Zakładamy, że spłaszczenie naszego obiektu jest spowodowane jego ruchem wirowym wokół najkrótszej osi. Znaczy to, że we współrzędnych kartezjańskich prędkość kątowa materii ma kierunek osi z. Zakładamy ponadto, że poszczególne elementy masy krążą po okręgach ze stałą w czasie prędkością kątową ω, lecz prędkości prędkości kątowej we wnętrzu naszego obiektu jest niezależny od φ i od czasu, lecz może zależeć od r i ϑ. Pole prędkości materii we współrzędnych (r, ϑ, φ) wyraża się więc wzorami:

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(r,\vartheta). \tag{91}$$

Stąd dla kartezjańskich składowych prędkości dostajemy:

$$v^x = \omega\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad v^y = \omega\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad v^z = 0. \tag{92}$$

Z tymi informacjami można łatwo sprawdzić, że równanie ciągłości $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} (\rho v^i)_{,i} = 0$ jest spełnione tożsamościowo, natomiast z równania ruchu:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v^j v^i{}_{,j} = -\rho^{-1} p_{,i} + \mathcal{V}_i \tag{93}$$

dostajemy:

$$\frac{r^2 + a^2}{f(r)}\cos\vartheta\, p_{,r} - \frac{r\sin\vartheta}{f(r)} p_{,\vartheta} + \frac{4\pi G\cos\vartheta}{r^2 + a^2\cos^2\vartheta}\int_0^r f(r')dr' = 0, \tag{94}$$

$$\omega^2 = \frac{r}{f(r)} p_{,r} + \frac{\cos\vartheta}{f(r)\sin^2\vartheta} p_{,\vartheta} + \frac{4\pi G r}{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2\cos^2\vartheta}\int_0^r f(r')dr' \tag{95}$$

(mamy tu tylko dwa równania, bo składowe $i = 1$ oraz $i = 2$ równań (93) okazują się identyczne). Widać teraz, że (94) jest równaniem liniowym niejednorodnym na p i jako takie ma rozwiązanie przy dowolnym warunku brzegowym dla $r = r_0$, zaś mając p znalezione z (94) możemy po prostu obliczyć ω z (95).

Pokazaliśmy więc, że istnieje ciągły rozkład gęstości, którego powierzchnie ekwipotencjalne są współogniskowymi elipsoidami obrotowymi. Ciało takie ma pewne ciekawe i pożądane własności, ma też i pewne zaskakujące. Do tych pierwszych należy fakt, że w granicy $a \to 0$ dostajemy z naszego rozwiązania wszystkie konfiguracje sferycznie symetryczne, a nie tylko niektóre z nich. Ponadto, przy ustalonym a, w danym punkcie zewnętrznym potencjał zależy tylko od masy źródła M, a nie zależy od jego rozmiarów. Natomiast siła grawitacyjna w danym punkcie wewnętrznym P jest określona przez masę zawartą wewnątrz powierzchni ekwipotencjalnej E przechodzącej przez P. Siła wywierana w punkcie P przez masę położoną na zewnątrz E jest równa zeru, podobnie jak w przypadku homeoidu z twierdzenia Newtona. Widać to np. z (90): potencjał $\mathcal{V}_i(r)$ zależy tylko od masy zawartej wewnątrz elipsoidy o mniejszej półosi r.

Do własności zaskakujących należy np. fakt, że im głębiej we wnętrzu ciała znajduje się badana powierzchnia ekwipotencjalna, tym bardziej jest ona spłaszczona, zaś dla $r = 0$ powierzchnią ekwipotencjalną jest koło o promieniu a rozpięte na okręgu ogniskowym elipsoid. Ponieważ zaś jedna z powierzchni ekwipotencjalnych jest zewnętrzną powierzchnią ciała, wynika stąd, że im mniejsze rozmiary ma badane ciało, tym bardziej jest ono spłaszczone.

Fakt, że funkcja $f(r)$ jest całkowicie dowolna, nadaje naszemu rozwiązaniu ogólność, która pozwala na uwzględnienie w nim szerokiej klasy równań stanu, co jest cechą bardzo pożądaną. Zauważmy przy okazji, że dzięki dowolności funkcji f mamy tu do czynienia ze znacznym bogactwem możliwych struktur wewnętrznych naszego obiektu. Mimo to, jak widać z (85), momenty multipolowe zewnętrznego pola grawitacyjnego są, przy ustalonym M, wyznaczone przez jeden tylko parametr a, zatem istnieją między nimi ściśle określone współzależności. Podobny fakt zachodzi dla rozwiązania Kerra, co było podnoszone jako argument, że źródło dla metryki Kerra musi być bardzo specjalnego typu (Thorne 1971). Jak widać, jest to argumentacja dość zawodna.

Zauważmy, że gęstość dana wzorem (83), rozpatrywana jako funkcja zmiennej ϑ na dowolnej ustalonej powierzchni ekwipotencjalnej, osiąga swoje minima dla $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi$, zaś maksimum dla $\vartheta = \pi/2$, i jest w przedziałach $]0, \frac{\pi}{2}[$ oraz $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ monotoniczna. Zmienność ρ w kierunku r jest natomiast w znacznym stopniu dowolna. Można zadać dowolny rozkład $\rho(r)$ wzdłuż linii $\vartheta = 0$ i każdy taki rozkład spełni równania ruchu i równanie ciągłości, chociaż niekoniecznie spełni rozsądne równanie stanu. Jeżeli zażądamy, zgodnie z intuicyjnymi oczekiwaniami, aby $\rho_{,r} < 0$, to powierzchnie stałego ρ będą bardziej spłaszczone od powierzchni stałego potencjału. Będą one więc przecinały powierzchnię zewnętrzną ciała wzdłuż okręgów $\{r = r_0, \vartheta = \text{const}\}$. Wtedy jednak funkcja $\rho(r,\vartheta)$ ma osobliwość na pierścieniu ogniskowym elipsoid, $\{r = 0, \vartheta = \pi/2\}$.

Nie jest jasne, w jaki sposób można skonstruować na podstawie podanych tu rozwiązań źródło dla pola grawitacyjnego Kerra w teorii względności. Będzie to przedmiotem dalszych badań. Sam fakt istnienia naszego rozwiązania jest jednak silną

sugestią, że pole grawitacyjne Kerra powinno mieć źródło zbudowane z cieczy doskonałej.

LITERATURA

Chandrasekhar S., 1969, *Ellipsoidal figures of equilibrium*. Yale University Press, New Haven and London, 252 pp.

Ferrers N. M., 1877, Quart. J. Pure Appl. Math., **14**, 1.

Kerr R. P., 1963, Phys. Rev. Lett., **11**, 237.

Krasiński A., 1978, Ann. Phys., **112**, 22.

Krasiński A., 1980, Phys. Lett. **A80**, 238.

Thorne K. S., 1971, w: *General Relativity and Cosmology. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Course 47 (R. K. Sachs wyd.). Academic Press, New York, p. 260.