POSTĘPY ASTRONOMII

Tom XXIX (1981). Zeszyt 1

FIGURY RÓWNOWAGI

Część II

FIGURY JEDNORODNE

ANDRZEJ KRASIŃSKI

Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika PAN (Warszawa)

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ

Часть II

ОДНОРОДНЫЕ ФИГУРЫ

А. Красиньски

Содержание

Статья обсуждает внешнее и внутренее гравитационное поле однородных эллипсоидов и тонких эллипсоидальных слоев. Представлено формулы для потенциялов, теорему о соответствии софокусных слоев одинаковой массы и теорему Маклорена. Коротко описано серию однородных сфероидов Маклорена.

FIGURES OF EQUILIBRIUM

Part II

HOMOGENEOUS FIGURES

Abstract

The paper deals with exterior and interior gravitational fields of homogeneous ellipsoids and of ellipsoidal thin shells. It contains the formulae for the potentials, the reciprocity theorem for confocal shells of equal masses, and the Maclaurin's theorem (equal attractions of two confocal homogeneous ellipsoids of equal masses). Maclaurin's family of homogeneous spheroids is briefly discussed.

Przypomnijmy na wstępie wyniki części I pracy, na które będziemy się tu powoływać.

D e f i n i c j a 1.
Homeoidem nazywamy porcję materii zawartą między dwiema podobnymi (tzn. jednokładnymi) współśrodkowymi elipsoidami, której powierzchnie stałej gęstości są też elipsoidami podobnymi do elipsoid ograniczających i współśrodkowymi z nimi.

T w i e r d z e n i e 1 (Newtona).
Siła grawitacyjna w dowolnym punkcie jamy jednorodnego homeoidu jest równa zeru (tzn. potencjał jest tam stały).
Teza twierdzenia Newtona jest prawidziwa również dla niejednorodnego homeoidu.
Stały potencjał w jamie homeoidu jednorodnego jest równy:

$$V = \frac{1}{2} G \rho (1 - m^2) \iint_S r^2 d\omega, \tag{13}$$

gdzie: G – oznacza stałą grawitacyjną, ρ – stałą gęstość materii homeoidu, m – stosunek podobieństwa wewnętrznej powierzchni homeoidu do zewnętrznej ($m < 1$), S – zewnętrzną powierzchnię homeoidu, r – odległość punktu na powierzchni S od środka homeoidu, $d\omega$ – element kąta bryłowego o wierzchołku w środku homeoidu.
Stały potencjał wewnątrz elipsoidalnej powłoki S o masie M i półosiach a_1, a_2, a_3 wynosi:

$$V = \frac{GM}{4\pi a_1 a_2 a_3} \iint_S r^2 d\omega. \tag{14}$$

Wielkość V, nazywana tu umownie potencjałem, jest równa $-\Phi$, gdzie Φ jest prawdziwym potencjałem pola grawitacyjnego, który po pomnożeniu przez masę ciała daje jego energię potencjalną. Wielkości V używamy, aby uniknąć wielokrotnego powtarzania znaku "–".
Numeracja paragrafów, twierdzeń i lematów będzie kontynuowana jako dalszy ciąg części I.

4. JEDNORODNE FIGURY RÓWNOWAGI

Podamy teraz rozwiązania newtonowskich równań pola (Laplace'a i Poissona), opisujące najprostsze jednorodne figury równowagi. Do tego celu będziemy potrzebowali znów kilku lematów. We wszystkich lematach początek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem badanych elipsoid.

L e m a t 4.
Dla elipsoidy S o półosiach a_1, a_2, a_3 zachodzi wzór:

$$\iint_S r^2 d\omega = 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty du/\Delta \overset{\text{def}}{=} 2\pi I, \tag{15}$$

gdzie $\Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)$.

Dowód: Równaniem elipsoidy we współrzędnych sferycznych o początku w jej środku i osi biegunowej wzdłuż półosi a_3 jest:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi}{a_1^2} + \frac{\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}{a_2^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{a_3^2}. \tag{16}$$

Zatem:

$$\iint_S r^2 d\omega = 8\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\sin\vartheta}{\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi/a_1^2 + \sin^2\varphi/a_2^2) + \cos^2\vartheta/a_3^2}. \tag{17}$$

Po podstawieniu $\varphi = \operatorname{arctg} t$ całka względem t daje elementarny wynik i otrzymujemy:

$$\iint_S r^2 d\omega = 4\pi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta(\sin^2\vartheta/a_1^2 + \cos^2\vartheta/a_3^2)^{-1/2} \times (\sin^2\vartheta/a_2^2 + \cos^2\vartheta/a_3^2)^{-1/2} \tag{18}$$

Tę całkę przekształcamy do postaci (15) przez podstawienie $\vartheta = \operatorname{arctg}\sqrt{u}/a_3$. Zauważmy, że wynik (15) nie zależy od faktu, iż oś biegunową układu sferycznego wybraliśmy właśnie wzdłuż półosi a_3, mogliśmy ją wybrać wzdłuż dowolnej innej półosi elipsoidy S (gdyby oś układu sferycznego nie pokrywała się z żadną osią elipsoidy, rachunek byłby bardzo skomplikowany).

L e m a t 5.

Niech l_i $(i = 1, 2, 3)$ będą składowymi jednostkowego wektora o kierunku wektora wodzącego punktu na powierzchni S elipsoidy (tzn. l_i są cosinusami kierunkowymi punktu na powierzchni S). Wtedy:

$$\iint_S r^2 l_i^2 d\omega = 2\pi a_i^2 A_i, \tag{19}$$

$$\text{gdzie: } A_i \overset{\text{def}}{=} a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)}. \tag{20}$$

Dowód: Załóżmy, że oś biegunowa układu sferycznego pokrywa się z kierunkiem półosi a_3 elipsoidy, i rozpatrzmy składową $i = 3$ równań (19). Wtedy $l_3 = \cos\vartheta$ i

wyrażenie $\iint r^2\cos^2\vartheta\, d\omega$ różni się od (17) tylko dodatkowym czynnikiem $\cos^2\vartheta$ w funkcji podcałkowej. Nie wpływa to na całkowanie po φ, zatem poszukiwany wynik dostaniemy dopisując czynnik $\cos^2\vartheta$ pod całką w (18). Ale gdy $\vartheta = \operatorname{arctg}\sqrt{u}/a_3$, to $\cos^2\vartheta = a_3^2/(a_3^2 + u)$, dostajemy więc (19) dla $i = 3$. Sprawdzenie dla $i = 2$ oraz $i = 1$ wykonujemy wybierając oś biegunową kolejno wzdłuż półosi a_2 i a_1.

Lemat 6.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^2 A_i = I, \tag{21}$$

$$A_i = \frac{I}{a_i^2} - \frac{1}{a_i}\frac{\partial I}{\partial a_i}, \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = 2, \tag{23}$$

$$\iint_S r^4 l_i^2\, d\omega = \pi a_i^3 \frac{\partial I}{\partial a_i}. \tag{24}$$

Dowód: (21) dostajemy wykonując sumowanie po i w (19), pamiętając przy tym, że $\sum_{i=1}^{3} l_i^2 = 1$, i porównując wynik z (15).

(22) dostajemy po prostu w oparciu o definicje I i A_i.

Aby otrzymać (23) zauważmy, że:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{du} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i^2 + u}. \tag{25}$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = a_1a_2a_3\int_0^\infty \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{a_i^2+u}\right)du = 2a_1a_2a_3\int_0^\infty \frac{1}{\Delta^2}\frac{d\Delta}{du}\,du = 2.$$

W celu udowodnienia (24) zróżniczkujmy (15) po a_i:

$$\iint_S r\frac{\partial r}{\partial a_i}\,d\omega = \pi\frac{\partial I}{\partial a_i}. \tag{26}$$

Zauważmy teraz, że (16) jest równoważne:

$$\frac{1}{r^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i^2}{a_i^2}. \tag{27}$$

Zróżniczkujmy więc (27) po a_i. Dostajemy:

$$\frac{\partial r}{\partial a_i} = r^3 \frac{l_i^2}{a_i^3}. \tag{28}$$

Podstawiając to do (26) otrzymujemy (24).

Teraz możemy udowodnić

T w i e r d z e n i e 3.

Potencjał w punkcie $\{x_i\}$ wewnątrz elipsoidy o półosiach a_1, a_2, a_3 wypełnionej cieczą jednorodną o gęstości ρ wynosi:

$$V = \pi G \rho (I - \sum_{i=1}^{3} A_i x_i^2). \tag{29}$$

Dowód: Niech R oznacza współrzędną radialną bieżącego punktu Q na elipsoidzie względem punktu $P = \{x_i\}$, zaś l_i — wersor równoległy do kierunku PQ zaczepiony w środku elipsoidy. Punkt Q leży na elipsoidzie, gdy:

$$\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{x_i + l_i R}{a_i} \right)^2 = 1. \tag{30}$$

Rozpisując (30) i korzystając z (27) dostajemy:

$$\frac{R^2}{r^2} + 2R \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i l_i}{a_i^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1 = 0. \tag{31}$$

Wartości R, które są pierwiastkami tego równania, określają współrzędne radialne względem punktu $\{x_i\}$ tych punktów na elipsoidzie, które leżą w kierunkach $+\vec{l}$ oraz $-\vec{l}$ od $\{x_i\}$. Oznaczmy je R_1 i R_2. Poprowadźmy przez punkt $P = \{x_i\}$ pęk prostych leżących na pobocznicy kąta bryłowego $d\omega$. Pęk ten wycina z wnętrza elipsoidy dwa kliny stożkowe, które dają przyczynek do potencjału w punkcie P równy:

$$dV = \frac{1}{2} G \rho (R_1^2 + R_2^2) d\omega \tag{32}$$

(por. dowód lematu 1 w części I). Całkując po pełnym kącie bryłowym (po całej elipsoidzie S) pokrywamy powierzchnię S dwukrotnie, zatem:

$$V = \frac{1}{4} G\rho \iint_S (R_1^2 + R_2^2) d\omega. \tag{33}$$

Ale skoro R_1 i R_2 są pierwiastkami równania (31), to w (33)

$$V = \frac{1}{2} G\rho \iint_S \left[2r^4 \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i l_i}{a_i^2} \right)^2 + r^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \right] d\omega. \tag{34}$$

Wielkości x_i, a_i nie zależą od zmiennych całkowania, natomiast, jak można łatwo sprawdzić, dla $i \neq j$;

$$\iint_S r^4 l_i l_j \, d\omega = 0.$$

Zatem w (34) mamy:

$$V = \frac{1}{2} G\rho \iint_S \left[2r^4 \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2 l_i^2}{a_i^4} + r^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2} \right) \right] d\omega. \tag{35}$$

Z pomocą (24) oraz (15) dostajemy teraz:

$$V = \pi G\rho \left[I + \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{a_i} \frac{\partial I}{\partial a_i} - \frac{I}{a_i^2} \right) x_i^2 \right]. \tag{36}$$

Na podstawie (22) otrzymujemy stąd (29), c.b.d.o.

D e f i n i c j a 2.

Rozważmy dwie elipsoidy E_a i E_b o półosiach odpowiednio (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3). Punkt X_i' położony na elipsoidzie E_b nazywa się odpowiednim do punktu X_i na elipsoidzie E_a, gdy:

$$\frac{X_i}{a_i} = \frac{X_i'}{b_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Łatwo widać, że dla dowolnej pary elipsoid każdy punkt na jednej z nich ma swój punkt odpowiedni na drugiej.

T w i e r d z e n i e 4.

Rozważmy dwie współogniskowe powłoki elipsoidalne o równych masach, E_a i E_b. Niech E_a leży wewnątrz E_b i niech punkty P i P' będą odpowiednimi punktami na E_a i

E_b. Wówczas potencjał powłoki E_b w punkcie P jest równy potencjałowi powłoki E_a w punkcie P'.

Dowód: Nieskończenie cienka powłoka o skończonej masie może być opisana rozkładem gęstości materii proporcjonalnym do funkcji δ Diraca, której argument zeruje się na powłoce. Zatem powłoka E_b o kształcie elipsoidy o równaniu:

$$\frac{x'^2}{b_1^2} + \frac{y'^2}{b_2^2} + \frac{z'^2}{b_3^2} = 1 \tag{37}$$

wytwarza w punkcie (X, Y, Z) potencjał:

$$V = G\rho \iiint_V d_3x'[(X-x')^2 + (Y-y')^2 + (Z-z')^2]^{-1/2} \times \delta\left(\frac{x'^2}{b_1^2} + \frac{y'^2}{b_2^2} + \frac{z'^2}{b_3^2} - 1\right), \tag{38}$$

gdzie: ρ jest stałą o wymiarze gęstości masy, zaś V — dowolnym obszarem zawierającym E_b całkowicie wewnątrz. Oznaczmy:

$$\rho = \frac{M}{2\pi b_1 b_2 b_3}, \tag{39}$$

gdzie M jest teraz stałą o wymiarze masy. Taki wybór współczynnika proporcjonalności między ρ i M zapewnia, że M jest masą źródła pola przy przejściu granicznym do rozkładu sferycznie symetrycznego.

Dokonajmy w (38) zamiany zmiennych:

$$z' = b_3\left[F + 1 - \frac{x'^2}{b_1^2} - \frac{y'^2}{b_2^2}\right)\right]^{1/2}, \tag{40}$$

tzn. $F = \dfrac{x'^2}{b_1^2} + \dfrac{y'^2}{b_2^2} + \dfrac{z'^2}{b_3^2} - 1,$

dostajemy:

$$V = \frac{GM}{4\pi b_1 b_2} \iiint_V dx'dy'dF\{(X-x')^2 + (Y-y')^2 + [Z-z'(F)]^2\}^{-1/2} \cdot \frac{b_3}{z}\delta(F) \tag{41}$$

$$= \frac{GM}{4\pi b_1 b_2} \iint_{E_b} dx'dy'\left(1 - \frac{x'^2}{b_1^2} - \frac{y'^2}{b_2^2}\right)^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{(X-x')^2+(Y-y')^2+\left[Z-b_3\left(1-\frac{x'^2}{b_1^2}-\frac{y'^2}{b_2^2}\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{-1/2}. \tag{42}$$

Analogiczną metodą możemy stwierdzić, że powłoka E_a o równaniu:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{z^2}{a_3^2}=1 \tag{43}$$

wytwarza w punkcie (X', Y, Z') potencjał:

$$V'=\frac{GM}{4\pi a_1 a_2}\int\int_{E_a} dx\,dy\left(1-\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{a_2^2}\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\left\{(X'-x)^2+(Y'-y)^2+\left[Z'-a_3\left(1-\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{a_2^2}\right)^{1/2}\right]^2\right\}^{-1/2}. \tag{44}$$

Jeśli teraz (X, Y, Z) i (X', Y', Z') są odpowiednimi punktami położonymi, odpowiednio, na powłokach E_a i E_b, to:

$$\frac{x}{a_1}=\frac{X'}{b_1},\quad \frac{Y}{a_2}=\frac{Y'}{b_2},\quad \frac{Z}{a_3}=\frac{Z'}{b_3}, \tag{45}$$

przy czym (X, Y, Z) spełnia równanie (43), zaś (X', Y', Z') spełnia równanie (37). Ponadto powłoki E_a i E_b są współogniskowe, więc:

$$a_3^2-a_1^2=b_3^2-b_1^2,\quad a_2^2-a_1^2=b_2^2-b_1^2. \tag{46}$$

Przy użyciu (45) i (46) można teraz sprawdzić, że $V=V'$. Rachunek jest prosty, lecz dość długi, więc pominiemy go. W ostatnim kroku rachunku należy w (42) dokonać zamiany zmiennych:

$$x'=\frac{b_1}{a_1}x,\quad y'=\frac{b_2}{a_2}y. \tag{47}$$

W n i o s e k: Powierzchniami ekwipotencjalnymi na zewnątrz nieskończenie cienkiego homeoidu są elipsoidy współogniskowe z nim.

Dowód: Wynika to łatwo z twierdzenia Newtona i twierdzenia 4: skoro wewnątrz powłoki E_b potencjał jest stały (twierdzenie Newtona), to jest również stały na powierzchni E_a, leżącej całkowicie wewnątrz E_b. Dla każdego punktu P' leżącego na E_b istnieje punkt P leżący na E_a taki, że potencjał w P' od E_a jest równy potencjałowi w P od E_b. Ale potencjały od E_b są równe na E_a, zatem także potencjały od E_a są równe na

E_b. Ponieważ E_b jest dowolną elipsoidą współogniskową z E_a, potencjał E_a jest stały na współogniskowych elipsoidach, c.b.d.o.

T w i e r d z e n i e 5.

Potencjał powłoki elipsoidalnej o masie M i półosiach a_1, a_2, a_3 w punkcie $\{x_i\}$ na zewnątrz niej jest równy:

$$V = \frac{1}{2} G M \int_{\lambda}^{\infty} du/[(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)]^{1/2}, \tag{48}$$

gdzie λ jest największym pierwiastkiem równania:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda} = 1 \tag{49}$$

zwanym współrzędną elipsoidalną punktu $\{x_i\}$ (λ — const. na elipsoidzie przechodzącej przez $\{x_i\}$ i współogniskowej z naszą powłoką). Zastrzeżenie, że λ jest n a j w i ę k s z y m pierwiastkiem (49) oznacza, że wszystkie trzy mianowniki w (49) są dodatnie, zatem punkty $\{x_i\}$ spełniające (49) przy ustalonym λ leżą rzeczywiście na elipsoidzie. Inne wartości λ wyznaczone przez (49) dają, ze względu na x, y i z, równania hiperboloidy jednopowłokowej i hiperboloidy dwupowłokowej.

Dowód: Szukany potencjał jest równy potencjałowi wewnątrz elipsoidy przechodzącej przez $\{x_i\}$ i współogniskowej z badaną, zgodnie z twierdzeniem 4. Niech owa większa powłoka ma półosie a'_1, a'_2, a'_3. Jej potencjał wewnętrzny, zgodnie z (14) i (15), wynosi:

$$V = \frac{1}{2} G M \int_{0}^{\infty} du'/[(a_1'^2 + u)(a_2'^2 + u)(a_3'^2 + u)]^{1/2}. \tag{50}$$

Ale $a_i'^2 = a_i^2 + \lambda$, gdzie λ musi spełniać równanie (49). Zmieniając więc zmienną podcałkową w (50) na $u = u' + \lambda$ otrzymujemy (48), c.b.d.o.

W oparciu o wzory (48) i (49) można teraz łatwo sprawdzić, że powierzchniowy rozkład gęstości materii na powłoce nie jest jednorodny, jak było powiedziane w zakończeniu części I. Jest on dany wzorem:

$$4\pi G \rho_S = \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}\Bigg|_{+} - \left[\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}\Bigg|_{-},$$

gdzie znaczki + i — oznaczają wartości odpowiedniej wielkości na powłoce S otrzymane przy zbliżaniu się do niej, odpowiednio od zewnątrz i od wewnątrz.

Potencjał wewnątrz powłoki jest stały, zatem $\left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_- = 0$, zaś $\left.\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_+$ można obliczyć z (48–49).

Zauważmy, że twierdzenie 4 pozostaje prawdziwe, jeśli zamiast mówić o powłokach o zerowej grubości i używać rozkładu gęstości opisanego funkcją δ Diraca będziemy mówić o infinitezymalnie cienkich warstwach materii, której gęstość jest stała na każdej z dwu warstw. Równość mas warstw oznacza wtedy po prostu równość iloczynów (gęstość w punkcie warstwy) × (powierzchnia warstwy) × (infinitezymalna grubość warstwy). W tym przypadku (40) opisuje po prostu zamianę zmiennych $z \to F$ pod całką. Dla otrzymania wzoru na przyczynek od takiej warstwy do potencjału należy zastąpić w (41) M z powrotem przez $2\pi\rho b_1 b_2 b_3$, gdzie ρ jest stałe w warstwie, i pominąć funkcję δ pod całką. Zmienna χ, której będziemy dalej używali, wiąże się z F równaniem:

$$F = \chi^2 - 1. \tag{51}$$

W związku z tym również Wniosek z twierdzenia 4 zachowuje prawdziwość dla warstw infinitezymalnych, zaś wzór (48) z twierdzenia 5 wymaga jedynie modyfikacji polegającej na zastąpieniu masy skończonej M masą infinitezymalną proporcjonalną do grubości warstwy, którą za chwilę obliczymy. Potencjał na zewnątrz elipsoidy wypełnionej zwykłym, trójwymiarowym rozkładem materii otrzymamy wtedy sumując przyczynki od infinitezymalnych warstw, czyli całkując (48) po parametrze numerującym poszczególne warstwy. Udowodnimy w ten sposób:

T w i e r d z e n i e 6.

Potencjał w punkcie $\{x_i\}$ na zewnątrz jednorodnej elipsoidy o półosiach a_1, a_2, a_3 i gęstości ρ jest dany wzorem:

$$V = \pi G \rho a_1 a_2 a_3 \int_\lambda^\infty \frac{du}{\Delta}\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2 + u}\right), \tag{52}$$

gdzie Δ jest dane przez (15), zaś λ jest największym pierwiastkiem równania (49).

Dowód: Obliczmy najpierw masę warstwy jednorodnej o gęstości ρ, zawartej między dwiema podobnymi elipsoidami, z których jedna powstaje przez powiększenie elipsoidy o półosiach (a_1, a_2, a_3) w stosunku χ zaś druga – przez powiększenie tej samej elipsoidy w stosunku $(\chi + \Delta\chi)$. Masa większej elipsoidy wynosi $M_d = \frac{4}{3}\pi\rho(\chi + \Delta\chi)^3 a_1 a_2 a_3$, masa mniejszej wynosi $M_m = \frac{4}{3}\pi\rho\chi^3 a_1 a_2 a_3$. Zatem masa warstwy wynosi $\Delta M = \frac{4}{3}\pi\rho a_1 a_2 a_3[(\chi + \Delta\chi)^3 - \chi^3]$. Jeśli warstwa ma grubość infinitezymalną $d\chi$, to jej infinitezymalna masa wynosi:

$$dM = 4\pi\rho a_1 a_2 a_3 \chi^2 d\chi \tag{53}$$

i wobec tego zamiast (48) mamy teraz:

$$dV = 2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \chi^2 d\chi \int_{\lambda(\chi)}^{\infty} du/[(\chi^2 a_1^2 + u)(\chi^2 a_2^2 + u)(\chi^2 a_3^2 + u)]^{1/2} \tag{54}$$

jako przyczynek do całkowitego potencjału od jednej warstwy infinitezymalnej oraz:

$$V = \int_0^1 \frac{dV}{d\chi} d\chi \tag{55}$$

jako potencjał całej elipsoidy. (Do tego samego wzoru doszlibyśmy wychodząc z (13) zapisanego dla powierzchni infinitezymalnie bliskich powstających przez powiększenie danej w stosunkach odpowiednio χ i $(\chi + d\chi)$ oraz korzystając z (15) przy uwzględnieniu $a_i \to \chi a_i$).

Całkę w (54) można przekształcić do dogodniejszej postaci. Przypomnijmy, że $\lambda(\chi)$ jest największym pierwiastkiem równania:

$$\frac{x^2}{\chi^2 a_1^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\chi^2 a_2^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\chi^2 a_3^2 + \lambda} = 1. \tag{56}$$

Dokonajmy teraz w (54) zamiany zmiennych:

$$u = \chi^2 t. \tag{57}$$

Wtedy z (55) dostajemy:

$$V = 2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int_0^1 \chi d\chi \int_s^{\infty} dt/[(a_1^2 + t)(a_2^2 + t)(a_3^2 + t)]^{1/2}, \tag{58}$$

gdzie $s = \lambda(\chi)/\chi^2$ spełnia równanie:

$$\frac{x^2}{a_1^2 + s} + \frac{y^2}{a_2^2 + s} + \frac{z^2}{a_3^2 + s} = \chi^2 \tag{59}$$

i jest jego największym pierwiastkiem. Związek (59) określa jednoznaczną zależność między χ i s, zatem możemy przejść do zmiennej s w pierwszej całce w (58). Wtedy:

$$V = 2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int_{\sigma}^{\infty} ds \left[\frac{x^2}{(a_1^2 + s)^2} + \frac{y^2}{(a_2^2 + s)^2} + \frac{z^2}{(a_3^2 + s)^2} \right] \times$$

$$\times \int_s^\infty dt/[(a_1^2+t)(a_2^2+t)(a_3^2+t)]^{1/2}, \tag{60}$$

gdzie σ jest teraz pierwiastkiem (59) (jako równania na s) przy $\chi = 1$, tzn. pierwiastkiem (49) (jako równania na λ). Całkowanie względem s można wykonać przez części. Korzystamy przy tym z faktu, że dla $s = \sigma$ spełnione jest (49) (przy podstawieniu $\sigma = \lambda$), zaś dla $s \to \infty$ całka po t w (60) dąży do zera. W wyniku otrzymujemy sumę dwu całek. Zmieniając w nich nazwy parametrów t na u oraz s na u i pamiętając, że σ jest największym pierwiastkiem (49) ze względu na λ, czyli $\sigma = \lambda$, dostajemy (52), c.b.d.o.

Zauważmy, że powierzchnie ekwipotencjalne potencjału (52) nie są elipsoidami (λ zależy od x_i!).

Ze wzoru (52) można łatwo odczytać:

Twierdzenie 7 (Maclaurina).

Niech E_a i E_b będą współogniskowymi jednorodnymi elipsoidami o równych masach. Siły przyciągania E_a i E_b są jednakowe w każdym punkcie przestrzeni na zewnątrz obu elipsoid (tzn. są równe jako wektory).

Dowód: Wystarczy obliczyć gradient potencjału danego przez (52) dla dwu współogniskowych elipsoid o osiach a_i oraz $b_i = (a_i^2+\mu)^{1/2}$, $i = 1, 2, 3$, $\mu = \text{const}$. Równość mas oznacza równość iloczynów $\rho_a a_1 a_2 a_3 = \rho_b b_1 b_2 b_3$.

Podany tu dowód twierdzenia 6 jest oparty na podręczniku Webstera (1949). Dowód Chandrasekhara (1969), w najistotniejszych fragmentach przepisany od Ramseya (1961), zawiera jawny błąd (siła grawitacyjna w danym punkcie przestrzeni ma tam zależeć tylko od odległości danego punktu od pewnego wybranego punktu na powierzchni elipsoidy).

Mając dane wzory na potencjał wewnętrzny (29) i zewnętrzny (52) dowolnej jednorodnej elipsoidy, możemy łatwo uzupełnić brakujące jeszcze elementy pełnego rozwiązania, tzn. rozkład ciśnienia wewnątrz elipsoidy oraz wartość prędkości kątowej Ω, przy założeniu, że cała elipsoida wiruje jako ciało sztywne wokół osi o kierunku półosi a_3 (zakładamy, że jest to najkrótsza półoś). Przy tych bowiem założeniach pole prędkości materii w elipsoidzie dane jest przez:

$$v_i = (\Omega \times r)_i,$$

czyli $v_x = -\Omega y$, $v_y = \Omega x$, $v_z = 0$, (61)

i wtedy równania ruchu Eulera:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k v^i{}_{,k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{62}$$

dają łatwo następujący wynik:

$$p/\rho = V + \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) + \text{const.} \tag{63}$$

Z założenia, powierzchnia naszej elipsoidy dana jest równaniem $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1$. Żądając, aby $p = 0$ na tej powierzchni i znając V dane przez (29) możemy stąd wyznaczyć zależność między Ω a parametrami elipsoidy. Jest to całkiem łatwe w przypadku elipsoid obrotowych spłaszczonych. Wtedy mamy bowiem $a_1 = a_2 \overset{\text{def}}{=} l > a_3$ i dla I oraz A_i znajdujemy z (15) i (20) wyrażenia elementarne:

$$I = \frac{2la_3}{e} \operatorname{arctg}(el/a_3),$$

$$A_1 = A_2 = \frac{a_3}{le^3} \operatorname{arctg} \frac{el}{a_3} - \frac{a_3^2}{e^2 l^2}, \tag{64}$$

$$A_3 = \frac{2}{e^2}\left(1 - \frac{a^3}{le} \operatorname{arctg} \frac{el}{a_3}\right),$$

gdzie $e \overset{\text{def}}{=} (l^2 - a_3^2)^{1/2}/l$ jest mimośrodem elipsoidy.

Równanie $p = 0$, jeśli ma być spełnione dla wszystkich x, y, z na powierzchni elipsoidy, jest równoważne trzem równaniom: muszą znikać współczynniki przy x^2, y^2 oraz wyraz wolny; z^2 eliminuje się za pomocą równania elipsoidy. Dwa równania są identyczne, trzecie wykorzystujemy do eliminacji stałej dowolnej, która pojawiła się w (63), i dostajemy:

$$\frac{\Omega^2}{\pi G\rho} = 2\left(A_1 - A_3 \frac{a_3^2}{l^2}\right) = 2\frac{3 - 2e^2}{e^3}\sqrt{1 - e^2} \arcsin e - \frac{6}{e^2}(1 - e^2). \tag{65}$$

W tej ostatniej postaci wzór powyższy został wyprowadzony przez M a c l a u r i n a w 1742 r. (M a c l a u r i n 1742, odsyłacz wg C h a n d r a s e k h a r 1969), w oparciu o argumenty analogiczne jak u Newtona, tzn. o postulat równowagi słupów płynu w kanałach wywierconych przez Ziemię.

Zauważmy, że granicę $\Omega = 0$ można osiągnąć we wzorze (65) na dwa sposoby: albo jako $e = 0$, tzn. przejście do sfery, albo jako $e = 1$, tzn. przejście do figury płaskiej. Skoro $\Omega = 0$ odpowiada dwu wartościom e, zaś funkcja $\Omega(e)$ dana przez (65) jest ciągła, to również dla pewnych $\Omega > 0$ powinny istnieć dwie wartości e spełniające (65). Ponieważ funkcja $\Omega(e)$ jest, jak widać, przestępna, analityczne badanie równania (65) jest bardzo trudne. Badanie to przeprowadza się raczej za pomocą komputera. Okazuje się, że po dwie wartości e istnieją dla każdego Ω, przy którym $\Omega^2/\pi G\rho < 0{,}449331$. Przy tej granicznej wartości, która odpowiada $e = 0{,}92995$

(Chandrasekhar 1969, s. 80), funkcja $\Omega(e)$ osiąga maksimum. Dla większych Ω figury równowagi rodziny (64) nie istnieją.

Nie będziemy się wgłębiali w analogiczne rozważania dla elipsoid Jacobiego, Dedekinda i Riemanna, bowiem, chociaż ciekawe, są one długie i wydłużyłyby artykuł ponad dopuszczalne granice. Wyniki i szczegóły tej analizy można znaleźć u Chandrasekhara (1969).

LITERATURA

Chandrasekhar S., 1969, *Ellipsoidal figures of equilibrium.* Yale University Press, New Haven and London, 252 pp.

Maclaurin C., 1742, *A Treatise on Fluxions.*

Ramsey A.S., 1961, *An introduction to the theory of Newtonian attraction.* Cambridge University Press, Cambridge, s. 162.

Webster A.G., 1949, *The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies.* Hafner Publishing Company, Inc. New York, s. 415.