

Klasyczna akrecja dyskowa

1. Stacjonarny dysk keplerowski – dyskusja jakościowa

Zakładamy akrecję materii z dużym momentem pędu, l_{ini} , jak np. w układach podwójnych z przepływem przez L1. Materia osiada na swojej pierwszej orbicie keplerowskiej (kołowej) wokół ciała centralnego. Promień cyrkularyzacji wynosi

$$l_{ini} = \sqrt{GM r_{ini}} \quad r_{ini} = \frac{l_{ini}^2}{GM}$$

Badamy teraz sytuację poniżej, dla $r \ll r_{ini}$

Przypuśćmy, że akrecja jest bardzo powolna, czyli cząstki pozostają praktycznie na orbitach kołowych, ale powoli dryfują na coraz ciaśniejszą orbitę ze względu na utratę momentu pędu w wyniku działania sił lepkich. Zatem moment pędu cząstek, w ramach teorii newtonowskiej, wynosi

$$l(r) = l_K(r) = \sqrt{GM r}$$

Powiedzmy sobie teraz, że tempo, w jakim towarzysz dostarcza masę, jest niezmiennie w czasie i równe \dot{M} . Co możemy z tego wydedukować?

1. Stacjonarny dysk keplerowski – dyskusja jakościowa

1a. Ocena jasności całkowitej źródła

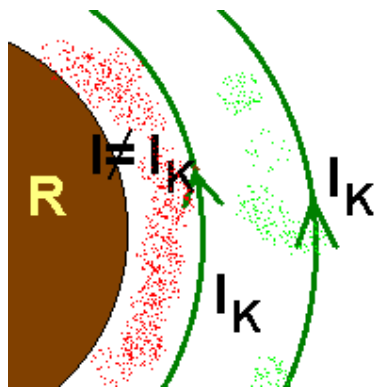
Poprzednio, przy analizie spadku radialnego (wykład 1) mieliśmy

$$L = \eta M c^2 \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{R_{Schw}}{R} \quad R - \text{promień gwiazdy}$$

Przy spadku 'dyskowym' musimy wziąć pod uwagę energię wiązania orbity kołowej tuż przy powierzchni gwiazdy

$$e = -\frac{GM}{R} + \frac{1}{2} \frac{l_K^2(R)}{R^2} = -\frac{1}{2} \frac{GM}{R} \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \frac{GM}{R}}{c^2} = \frac{1}{4} \frac{R_{Schw}}{R}$$

Energia wydzielona w dysku jest dwa razy mniejsza niż energia wydzielona przy spadku radialnym na obiekt o tym samym promieniu. Ale w przypadku gwiazdy, a **nie czarnej dziury**, dojdzie dysku do powierzchni gwiazdy nie wyczerpuje zapasu energii do odzyskania. Jeśli gwiazda nie rotuje, to energia

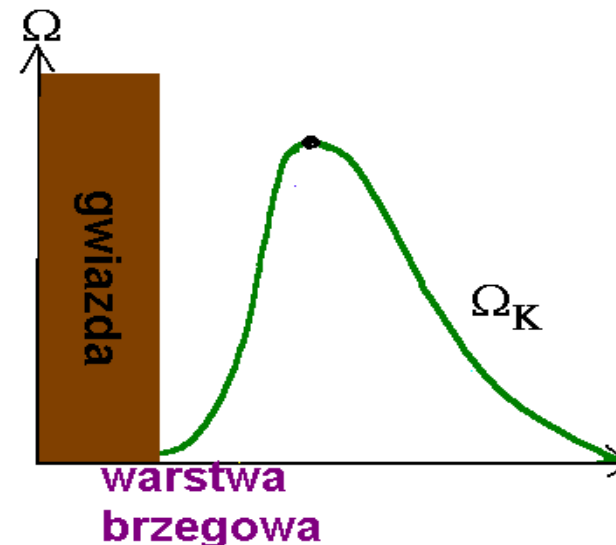


kinetyczna zostanie wydzielona w wyniku tarcia, co da dodatkowo z samej warstwy brzegowej (*boundary layer*):

$$\eta_{BL} = \frac{1}{4} \frac{R_{Schw}}{R}$$

Warstwa brzegowa to dodatkowa jasność, w dodatku równa jasności dysku zcałkowanej po powierzchni. Razem sumują się do wydajności akrecji sferycznej na gwiazdę.

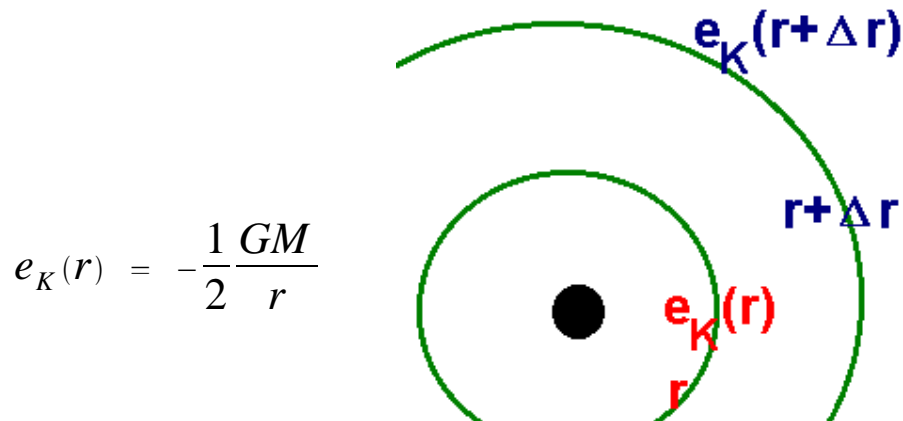
Warstwa brzegowa nie występuje przy akrecji na czarną dziurę.



1. Stacjonarny dysk keplerowski – dyskusja jakościowa

1b. Szacowanie rozkładu jasności w dysku akrecyjnym

Rozważamy dwie bliskie orbity kołowe:



$$e_K(r) = -\frac{1}{2} \frac{GM}{r}$$

przy zmianie orbity:

$$\Delta e_K = e_K(r + \Delta r) - e_K(r) = -\frac{1}{2} \frac{GM}{r + \Delta r} + \frac{1}{2} \frac{GM}{r}$$

$$\Delta e_K \approx -\frac{1}{2} \frac{GM}{r^2} \Delta r$$

Jeżeli w ciągu 1 sek przechodzi \dot{M} kg masy, to tempo wydzielania energii w tym pasie dysku jest

$$E = \dot{M} \frac{1}{2} \frac{GM}{r^2} \Delta r$$

Ta energia jest wyświecona przez powierzchnię tego właśnie pasa: $S = 2\pi r 2\Delta r$

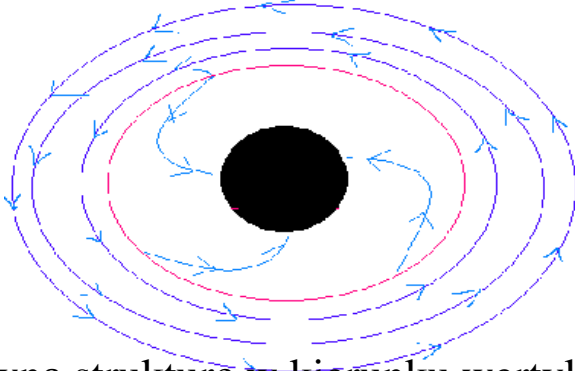
Dlatego strumień promieniowania z jednostki powierzchni dysku akrecyjnego, unoszący nadmiar energii wynosi **orientacyjnie**

$$F(r) = \frac{E}{S} = \frac{GM\dot{M}}{8\pi r^3}$$

Emisję z dysku akrecyjnego określa tempo akrecji oraz kształt potencjału grawitacyjnego, nie są potrzebne żadne informacje dotyczące natury sił lepkich lub struktury dysku. Ten wniosek jest słuszny dość ogólnie dla dysku stacjonarnego keplerowskiego, natomiast prezentowany wzór nie jest całkiem poprawny ze względu na zaniedbanie wewnętrznego warunku brzegowego, o czym za chwilę.

2. Dysk keplerowski – równanie ciągłości

Teraz zajmiemy się **ścislými** równaniami dla dysku keplerowskiego. To ostatnie wymaga, aby dysk był geometrycznie cienki (inaczej ruch nie jest keplerowski).



Dysk ma pewną strukturę w kierunku wertykalnym (oś z), czyli pewien rozkład gęstości, temperatury i ciśnienia, natomiast jest osiowo symetryczny. Zbadamy teraz konsekwencje równania ciągłości, nie zakładając jeszcze stajonarności.

Równanie ciągłości w formie ogólnej:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

a we współrzędnych cylindrycznych, po uwzględnieniu symetrii

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

zeli dysk jest geometrycznie cienki, a nas nie interesują szczegóły, to warto dysk przeciąłkować w kierunku wertykalnym, co umożliwi wprowadzenie pojęcia **gęstości powierzchniowej**

$$\Sigma = \int_0^{\infty} \rho(r, z) dz$$

2. Dysk keplerowski – równanie ciągłości c.d.

Całkując równanie ciągłości po grubości dysku otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dz + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{+\infty} R \rho v_r dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z dz = 0$$

\uparrow
 2Σ



=0 je żeli nie ma wypływu z dysku w kierunku wertykalnym (wiatr)

Wprowadzamy teraz inną, ogólnie pożyteczną wielkość: - tempo akrecji:

$$\dot{M}(t, r) = - \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \pi r \rho v_r dz$$

Zatem w przypadku całkiem ogólnym (pominięcie utraty masy) mamy:

$$4 \pi r \frac{\partial \Sigma}{\partial t} - \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} = 0$$

Jeżeli chcemy rozważyć **przypadek stacjonarny**, to oczywiście wymagamy, żeby pochodne po czasie były równe zero, a w szczególności:

stacjonarność:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0$$

$$\dot{M} = \dot{M}_0 = const$$

Oczywiście tego mogliśmy się spodziewać, ale wyprowadzenie równania ciągłości było dobrym ćwiczeniem przed wyprowadzeniem równania na transport momentu pędu, którego postaci nieco trudniej się domyśleć

3. Dysk keplerowski – transport momentu pędu

Teraz rozważymy równanie ruchu w kierunku ϕ . Mają one ogólną postać wektorową w przypadku, gdy mamy nie tylko ciśnienie, ale także siły lepkie

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \vec{v} = -\nabla T + \vec{f} \quad \text{równania Naviera-Stokesa} \quad T - \text{tensor (tarcie, ciśnienie)}$$

Składowa w kierunku ϕ ma postać ogólną (we współrzędnych cylindrycznych):

$$\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \rho v_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \rho v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \rho \frac{1}{r} v_r v_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 t_{r\phi})}{\partial r}$$

jeżeli dominuje prędkość w kierunku ϕ ; $t_{r\phi}$ jest składową tensora sił lepkich, jedyną ważną.

Dysk keplerowski to $v_\phi = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ oraz symetria osiowa, co znakomicie upraszcza równanie, nawet bez założenia stacjonarności

$$\rho v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \rho \frac{1}{r} v_r v_\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 t_{r\phi})}{\partial r}$$

To równanie można zgrabniej przepisać, używając momentu pędu: $l = v_\phi r$

$$\frac{1}{r} \rho v_r \frac{\partial l_K}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 t_{r\phi})}{\partial r}$$

to równanie należy teraz pomnożyć przez $2\pi r^2$, i otrzymujemy a następnie przecałkować po grubości dysku

$$2\pi r \rho v_r \frac{\partial l_K}{\partial r} = 2\pi \frac{\partial (r^2 t_{r\phi})}{\partial r} \quad M \frac{\partial l_K}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi r^2 t_{r\phi} dz \quad M \frac{\partial l_K}{\partial r} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}; \quad \text{gdzie} \quad \Theta = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi r^2 t_{r\phi} dz$$

Jeśli rozważyć **przypadek stacjonarny**, to można równanie przecałkować po r i otrzymać

$$M (l - l_{inn}) = \Theta - \Theta_{inn}$$

3. Dysk keplerowski stacjonarny – transport momentu pędu c.d.

Ustalenie warunku brzegowego:

zamiast ogólnie dwóch dowolnych stałych, możemy określić interesujące nas rozwiązanie korzystając z dyskusji na poprzednim wykładzie.

W przypadku akrecji na czarną dziurę mamy naturalny warunek brzegowy na orbicie marginalnie stabilnej:

$$l_{in} = l_K(r_{ms})$$

$\Theta_{in} = 0$ ponieważ tam rozpoczyna się spadek swobodny i siły lepkie nie działają..

W przypadku akrecji na zwykłą gwiazdę musimy odwołać się do postaci tensora T

$$t_{r\phi} = \eta r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

siły lepkie nie działają, gdy rotacja jest sztywna, $\Omega = \text{const}$

Jak mówiliśmy, dość blisko powierzchni gwiazdy jest miejsce, gdzie $d\Omega/dr = 0$, jeśli gwiazda nie rotuje, zatem ponownie mamy warunek $\Theta_{in} = 0$.

Zatem najzupełniej ogólnie, dla **dysku keplerowskiego stacjonarnego**, transport momentu pędu opisujemy równaniem

$$M(l - l_{inn}) = \Theta$$

l_{in} – moment pędu na orbicie marginalnie stabilnej lub przy powierzchni gwiazdy

$$l_{inn} = \sqrt{GM r_{ms}} = \frac{GM}{c} \sqrt{3}$$

dla nierotującej czarnej dziury w przybliżeniu newtonowskim

$$l_{inn} = \sqrt{GMR_{gwiazdy}}$$

dla zwykłej gwiazdy

4. Dysk keplerowski – równanie energii

Równanie energii uzupełnia równanie ciągłości i równania ruchu. Poprzednio wypisywaliśmy je w postaci zawierającej energię kinetyczną i potencjalną, ale można je przekształcić używając równań ruchu. Najbardziej zwartą postać uzyskuje się, wprowadzając entropię:

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \rho T \vec{v} \nabla S = -\nabla F_{rad} - \nabla q + \Pi$$

Nad tym równaniem trzeba teraz popracować uwzględniając następujące fakty:

(i) w przypadku dysku keplerowskiego ważny jest tylko jeden element tensora i ma postać

$$\Pi = -t_{r\phi} r \frac{d\Omega}{dr}$$

(ii) rozważymy dysk stacjonarny, w przybliżeniu newtonowskim

(iii) zaniedbamy adwekcję (radialny strumień ciepła)

(iv) zaniedbamy radialny strumień promieniowania

(v) zaniedbamy przewodnictwo

to zostanie nam tylko

$$\longrightarrow 0 = -\frac{dF_{rad}}{dz} - t_{r\phi} r \frac{d\Omega}{dr}$$

Równanie to można przecałkować po grubości dysku: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_{rad}}{dz} dz = -\int_{-\infty}^{\infty} t_{r\phi} r \frac{d\Omega}{dr} dz$

$$2 F_{rad} = -r \frac{d\Omega}{dr} \int_{-\infty}^{\infty} t_{r\phi} dz$$

a to z kolei pomnożyć przez $2\pi r$ i wykorzystać definicję Θ

$$4\pi F_{rad} = -\frac{d\Omega}{dr} \Theta$$

$$F_{rad}(r) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi r^3} \left(1 - \frac{l_{inn}}{l_K(r)}\right)$$

To jest w pełni **poprawny wzór na strumień promieniowania** z powierzchni dysku stacjonarnego keplerowskiego. Różni się o czynnik od tego z początku wykładu, ale nadal **nie zależy od postaci sił lepkich!** To będzie bardzo ważne na następnym wykładzie (liczenie widma dysku).

5. Warunek brzegowy dla czarnej dziury w różnych przybliżeniach

Czynnik $1 - l_{in}/l_K$ w poprzednim wzorze można wygodnie wyrazić poprzez $x = r/R_{Schw}$.

(i) przybliżenie newtonowskie

$$1 - \frac{l_{inn}}{l_K} = 1 - \sqrt{\frac{3}{x}} \quad \text{wielkość oczywiście zeruje się dla } x=3, \text{ na orbicie marginalnie stabilnej,}$$

tam strumień promieniowania z dysku jest równy zero, a poniżej wzór się nie stosuje.

(ii) przybliżenie pseudnewtonowskie

$$1 - \frac{l_{inn}}{l_K} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{(x-1)}{x^{3/2}} \quad \text{w sumie podobne, zwłaszcza dla dużego } x$$

(iii) metryka Schwarzschilda (nierotująca czarna dziura)

$$1 - \frac{l_{inn}}{l_K} = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{3x}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2x}} \ln \frac{(1 + \sqrt{\frac{3}{2x}})(\sqrt{2}-1)}{(1 - \sqrt{\frac{3}{2x}})(\sqrt{2}+1)}}{1 - \frac{1}{x}}$$

(iv) metryka Kerr (rotująca czarna dziura)

W tym wypadku jest jeszcze dużo gorzej, bo dochodzi problem wyznaczenia położenia orbity marginalnie stabilnej w funkcji parametru **a**. Ostateczny wzór na strumień promieniowania z dysku ma nadal strukturę

$$F_{rad}(r) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi r^3} L(r, a)$$

$$L(r, a) \rightarrow 1 \quad \text{dla } r \rightarrow \infty$$

$$L(r_{ms}, a) = 0$$

6. Równania budowy stacjonarnego keplerowskiego dysku

Ten problem nas interesuje wtedy, gdy chcemy obliczyć coś więcej niż widmo promieniowania dysku świecącego jak ciało czarne, czyli na przykład gdy chcemy sprawdzić efekty geometryczne (grubość dysku), ocenić skale czasowe (stabilność, ewolucja), gdy chcemy sprawdzić, czy aby nasz dysk jest dostatecznie geometrycznie cienki i keplerowski lub gdy chcemy policzyć widmo dysku lepiej.

Parametry globalne dysku:

$$M, M$$

Równania struktury wertykalnej będą nam określać takie wielkości jak gęstość, temperatura, ciśnienie, prędkość radialna materii w dysku jako funkcje nie tylko promienia r , ale także odległości z od płaszczyzny równikowej:

(i) równanie ruchu w kierunku 'z'

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\frac{GMz}{r^3} \quad \text{równanie równowagi hydrostatycznej}$$

(ii) równanie energii

$$0 = -\frac{dF_{rad}}{dz} - t_{r\phi} r \frac{d\Omega}{dr}$$

Nic dalej nie zdziałamy, jeśli nie określimy członów występujących w tym równaniu. Człon sił lepkich – genialne założenie stojące u podstawy tzw. standardowej teorii dysków akrecyjnych. Pochodzi z prac Shakura (1972) i Shakura & Sunyaev (1973)

$$t_{r\phi} = \alpha P_{tot} \quad P_{tot} = P_{gas} + P_{rad} \quad \text{tensor sił lepkich proporcjonalny do ciśnienia}$$

Współczynnik α jest tu parametrem modelu, ale najnowsze wyniki teoretyczne i obserwacyjne (o tym coś będzie później) wskazują, że α jest rzędu 0.2 w obiektach galaktycznych i raczej 0.02 w AGN.

6. Równania budowy stacjonarnego keplerowskiego dysku c.d.

Przy takim założeniu można prawą stronę równania już wyrazić poprzez interesująca nas i wyznaczalne wielkości, i mamy drugie podstawowe równanie:

$$\frac{dF_{rad}(z)}{dz} = \frac{3}{2} \alpha P \Omega_K \quad \text{równanie generacji energii}$$

Musimy jeszcze doprecyzować lewą stronę równania, czyli określić, jak energia dysypowana w głębi dysku przez siły lepkie będzie transportowana przez promieniowanie na zewnątrz.

O tym jeszcze będzie, ale już teraz dla kompletu stwierdzimy, że ogólnie,

$$\vec{F}_{rad} = -k \nabla T$$

co w przypadku dysku, gdy zaniedbamy strumień promieniowania w kierunku radialnym, daje nam

$$F_{rad}(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dz} \quad \text{równanie transportu promienistego}$$

Te trzy równania różniczkowe wystarczają, żeby określić strukturę wertykalną dysku, czyli policzyć $F_{rad}(z)$, $P(z)$ i $T(z)$, ale muszą być uzupełnione dodatkowymi związkami algebraicznymi i warunkami brzegowymi.

Związki algebraiczne:

(i) równanie stanu (ciśnienie = ciśnienie gazu + ciśnienie promienowania)

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T + \frac{1}{3} a T^4$$

k – stała Boltzmana, μ – średni ciężar cząsteczkowy
 m_H – masa atomu wodoru, $a = 4 \sigma/c$, σ – stała Stefana-Boltzmana
wartości – patrz Zombeck “Handbook ...”

(ii) współczynnik nieprzezroczystości

$$\kappa(\rho, T) = \kappa_{es} + \kappa_{abs}$$

Są proste wzory analityczne (Zombeck), dokładniejsze wartości dostępne w formie tablicowanej.

6. Równania budowy stacjonarnego keplerowskiego dysku c.d.

Dzięki związkom algebraicznym mamy więc trzy równania na trzy zmienne:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{GMz\rho}{r^3} \quad \text{równanie równowagi hydrostatycznej}$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{3\kappa\rho F_{rad}(z)}{16\sigma T^3} \quad \text{równanie transportu promienistego}$$

$$\frac{dF_{rad}(z)}{dz} = \frac{3}{2}\alpha P\Omega_K \quad \text{równanie generacji energii}$$

Musimy sformułować jeszcze **warunki brzegowe**, aby można było rozpocząć całkowanie. W zadaniach matematycznych zwykle są one określone dla wszystkich wielkości w jednym punkcie z_0 . Niestety, tak się nie da dla struktury dysku akreijnego (bądź struktury gwiazdy – ten sam problem!).

Przy powierzchni dysku, dla $z = H(r)$ (na razie nie znanego) mamy

$$F_{rad}(H) = F_{rad}(r) = \frac{3GM\dot{M}}{8\pi r^3} \left(1 - \sqrt{\frac{3r_{Schw}}{r}}\right)$$

$$\rho(H) = 0$$

$$T(H) = \left(\frac{F_{rad}}{\sigma}\right)^{1/4} \quad \leftarrow \quad F_{rad}(r) = \sigma T^4 \quad \text{jeżeli zaczynamy od temperatury efektywnej}$$

$$F_{rad}(0) = 0$$

Równania rozwiązujemy od góry (zgadując wartość H w danym r), a następnie sprawdzamy, czy trafiliśmy w czwarty warunek. Jeśli nie, to zmieniamy H , i w ten sposób, iteracyjnie, H zostaje wyznaczone.