Mathématiques.

Metoda rozwiązywania liczbowego równań liniowych, obliczania wyznaczników i odwrotności, oraz redukcji form kwadratowych. — Méthode de résolution numérique des équations linéaires, du calcul des déterminants et des inverses, et de réduction des formes quadratiques.

Note

de M. ***TH. BANACHIEWICZ*** m. t.

présentée le 3 Octobre 1938.

Pour résoudre numériquement un système d'équations linéaires on emploie d'habitude la méthode d'élimination successive ou celle des déterminants. Dans ce travail nous proposons pour le même but la méthode de la décomposition en facteurs. Cette méthode paraît avantageuse à divers points de vue, en particulier lorsque le nombre des inconnues est considérable, et elle se prête aussi parfaitement au calcul des déterminants et des inverses, de même qu'à la réduction des formes quadratiques.

§ 1. Considérons le système de n équations linéaires à n inconnues

$$\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + \ldots + A_{n1}x_n + A_{n+1,1} = 0 \\ A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + \ldots + A_{n2}x_n + A_{n+1,2} = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{1n}x_1 + A_{2n}x_2 + \ldots + A_{nn}x_n + A_{n+1,n} = 0 \end{array} \tag{1.1}$$

ayant une solution unique.

En posant

$$\mathbf{X} = 1\{x_1 \;\; x_2 \ldots x_n \;\; 1\} \tag{1.A}$$

$$\mathbf{A}' = \left\{ \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} & A_{n+1,1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} & A_{n+1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} & A_{n+1,n} \end{matrix} \right\} \tag{1.B}$$

nous écrirons le système (1.1), comme d'ordinaire,

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \mathbf{A}' = \mathbf{0} \tag{1.1-bis}$$

Supposons maintenant $\mathbf{A}'$ décomposé en un produit de deux cracoviens $\mathbf{g}'$ et $\mathbf{h}$ tels que

$$\mathbf{g}' = \left\{ \begin{matrix} 1 & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{n1} & g_{n+1,1} \\ 0 & 1 & g_{32} & \cdots & g_{n2} & g_{n+1,2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & g_{n3} & g_{n+1,3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & g_{n+1,n} \end{matrix} \right\} \qquad \mathbf{h} = \left\{ \begin{matrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & \ldots & h_{n1} \\ 0 & h_{22} & h_{32} & \ldots & h_{n2} \\ 0 & 0 & h_{33} & \ldots & h_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h_{nn} \end{matrix} \right\} \tag{1.C}$$

que nous appellerons facteurs canoniques de $\mathbf{A}'$. On suppose les équations (1.1) disposés de façon que $h_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$; ceci est toujours possible, car dans le cas contraire le déterminant du système (1.1) serait égal à zéro.

Avec

$$\mathbf{A}' = \mathbf{g}' \cdot \mathbf{h} \tag{1.2}$$

l'équation (1.1-bis) donne

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{g}' \cdot \mathbf{h}) = \mathbf{X} \cdot (\mathbf{h} \cdot \mathbf{g}') = \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \mathbf{g}' \cdot \mathbf{h} = \mathbf{0}, \tag{1.1-ter}$$

et l'on voit facilement qu'en vertu des suppositions faites,

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \mathbf{g}' = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Soit en effet

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} \mathbf{g}' = \mathbf{I}\{s_1 \ s_2 \ldots s_n\}.$$

D'après l'équation (1.1-ter) et la définition (1.C) de $\mathbf{h}$; on devra avoir

$$s_1 h_{11} = 0.$$

d'où $s_1 = 0$, puisque $h_{11} \neq 0$.

Mais en vertu de la même équation et de (1.C)

$$s_1 h_{21} + s_2 h_{22} = 0,$$

d'où $s_2 = 0$, puisque $s_1 = 0$ et $h_{22} \neq 0$.

On obtient de la même façon que $s_3 = s_4 = \ldots = s_n = 0$, ce qui démontre l'équation (1.3).

D'autre part, si l'on suppose que les g_{ik} ($k = 1, 2, \ldots n$; $i = k+1, k+2, \ldots n, n+1$) sont calculés, l'équation (1.3) mène rapidement aux valeurs des inconnues.

En effet, cette équation s'écrit explicitement

$$\left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ g_{31} & g_{32} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \ldots & & g_{n,n-1} & & 1 \\ g_{n+1,1} & g_{n+1,2} & g_{n+1,3} & \ldots & & g_{n+1,n-1} & & g_{n+1,n} \end{matrix}\right\} = \underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}\right\}}_{n \text{ zéros}}$$

En présentant son premier membre comme la somme de deux cracoviens et en transportant l'un d'eux au côté droit, on obtient

$$\left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} g_{21} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ g_{31} & g_{32} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & & & g_{n,n-1} & & 0 \\ g_{n+1,1} & g_{n+1,2} & & & g_{n+1,n-1} & & g_{n+1,n} \end{matrix}\right\} \tag{1·4}$$

et cette équation permet de calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \ldots x_2, x_1$, c'est-à-dire toutes les inconnues.

Quant aux déterminants, si l'on désigne par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{g}$ les tableaux $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{g}'$ privés chacun de leur dernière colonne, on aura pour $|\mathbf{A}|, |\mathbf{g}|$ et $|\mathbf{h}|$, d'après le théorème de Cauchy-Binet, la relation

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{g}| \cdot |\mathbf{h}|.$$

Mais suivant le théorème bien connu

$$|\mathbf{g}| = 1 \qquad |\mathbf{h}| = h_{11}\ h_{22}\ h_{33} \ldots h_{nn},$$

et il s'ensuit que

$$|\mathbf{A}| \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} = h_{11}\, h_{22}\, h_{33} \ldots h_{nn}. \tag{1.5}$$

La décomposition de $\mathbf{A}'$ en deux facteurs canoniques nous donne de cette façon, à l'aide de (1.4) et (1.5), les valeurs des inconnues d'après le premier facteur $\mathbf{g}'$, et celle du déterminant d'après le second facteur $\mathbf{h}$.

§ 2. Occupons-nous maintenant de la manière d'effectuer cette décomposition. On commence par déterminer la première ligne de $\mathbf{h}$ et de $\mathbf{g}'$. La condition que la première colonne de $\mathbf{g}'\cdot\mathbf{h}$ soit égale à la première *colonne* de $\mathbf{A}'$ nous donne la première ligne de $\mathbf{h}$

$$\{h_{11}\ \ h_{21} \ldots h_{n1}\} = \{A_{11}\ \ A_{12} \ldots A_{1n}\}, \tag{2.1}$$

tandis que la condition que la première *ligne* de $\mathbf{A}'$ soit égale à la première ligne du produit $\mathbf{g}'\cdot\mathbf{h}$ nous donne la première ligne de $\mathbf{g}'$

$$\{g_{21}\ \ g_{31} \ldots g_{n1}\ \ g_{n+1,1}\}\, h_{11} = \{A_{21}\ \ A_{31} \ldots A_{n1}\ \ A_{n+1,1}\} \tag{2.2}$$

$h_{11} \neq 0$ étant déjà connu.

Remarquons que la détermination des premières lignes de $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}'$ d'après (2.1) et (2.2) nous assure ainsi l'identité de la première colonne et de la première ligne de $\mathbf{g}'\cdot\mathbf{h}$ avec la même colonne et la même ligne de $\mathbf{A}'$. Pareillement les k premières lignes de $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}'$ donnent les k premières colonnes et lignes de $\mathbf{A}'$.

Montrons maintenant comment on calcule la ligne k de $\mathbf{h}$ et la même ligne de $\mathbf{g}'$, si l'on admet qu'on connaît déjà leurs premières $k-1$ lignes.

La condition d'identité de la *colonne* k de $\mathbf{g}'\cdot\mathbf{h}$ et de $\mathbf{A}'$ nécessite que

$$\begin{vmatrix} g_{k1} \\ g_{k2} \\ \cdot \\ g_{k,k-1} \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{k1} & h_{k+1,1} & h_{n1} \\ h_{k2} & h_{k+1,2} & h_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ h_{k,k-1} & h_{k+1,k-1} & h_{n,k-1} \\ h_{k,k} & h_{k+1,k} & h_{n,k} \end{vmatrix} = \mathbf{I}\{A_{k,k}\ \ A_{k,k+1} \ldots A_{k,n}\}.$$

ce qui fournit la ligne k de $\mathbf{h}$ à l'aide de la formule

$$\{h_{k,k}\ \ h_{k+1,k} \ldots h_{n,k}\} = \begin{vmatrix} A_{k,k} & A_{k,k+1} & \ldots A_{k,n} \\ h_{k1} & h_{k+1,1} & \ldots h_{n,1} \\ h_{k,2} & h_{k+1,2} & \ldots h_{n,2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ h_{k,k-1} & h_{k+1,k-1} & \ldots h_{n,k-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -g_{k1} \\ -g_{k2} \\ \cdot \\ -g_{k,k-1} \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

De pareille manière la condition que les *lignes* k de $\mathbf{g}'\cdot\mathbf{h}$ et de $\mathbf{A}'$ doivent être identiques donne les équations

$$\begin{Bmatrix} g_{k+1,1} & g_{k+2,1} & \cdots & g_{n+1,1} \\ g_{k+1,2} & g_{k+2,2} & \cdots & g_{n+1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k+1,k} & g_{k+2,k} & \cdots & g_{n+1,k} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{k1} \\ h_{k2} \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{kk} \end{Bmatrix} = \{A_{k+1,k} \quad A_{k+2,k} \cdots A_{n+1,k}\}$$

qui conduisent à l'équation

$$\{g_{k+1,k} \quad g_{k+2,k} \cdots g_{n+1,k}\} = \begin{Bmatrix} A_{k+1,k} & A_{k+2,k} & \cdots & A_{n+1,k} \\ g_{k+1,1} & g_{k+2,1} & \cdots & g_{n+1,1} \\ g_{k+1,2} & g_{k+2,2} & \cdots & g_{n+1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k+1,k-1} & g_{k+2,k-1} & \cdots & g_{n+1,k-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -h_{k1} \\ -h_{k2} \\ \cdot \\ -h_{k,k-1} \end{Bmatrix} h_{k,k}^{-1}. \quad (2.4)$$

Les équations (2.3) et (2.4) fournissent la ligne k de $\mathbf{g}'$ et de $\mathbf{h}$ d'après les lignes précédentes. La première ligne de ces cracoviens étant connue d'après (2.1) et (2.2), on obtiendra ainsi successivement les lignes 2-de, 3-me, ... n-me de $\mathbf{g}'$ et de $\mathbf{h}$, et l'on déterminera ainsi tous leurs éléments.

On voit que les calculs, qui sont tout à fait élémentaires, se font à l'aide des schémas cracoviens, ce qui contribue à leur simplicité.

Combien de quantités auxiliaires faut-il déterminer ? Le nombre de ces quantités est égal au nombre des éléments de $\mathbf{g}'$ et $\mathbf{h}$, n^2+n, moins le nombre n des éléments connus de la première ligne de $\mathbf{h}$. On a en tout avec la méthode de décomposition

$$n^2 \quad \text{quantités}$$

à déterminer.

Avec la méthode d'élimination on calcule de même les éléments de $\mathbf{g}'$, au nombre de $\frac{1}{2}(n+1)n$, dont on a besoin pour effectuer l'élimination. Le nombre des coefficients et des termes libres à obtenir est de $n(n-1)$ dans les $n-1$ équations (réduites) à $n-1$ inconnues, de $(n-1)(n-2)$ dans les équations à $n-2$ inconnues etc, et comme

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+3\cdot 2+2\cdot 1=\tfrac{1}{3}(n+1)n(n-1),$$

on a ensemble à calculer

$$\tfrac{1}{2}(n+1)n+\tfrac{1}{3}(n+1)n(n-1)=\tfrac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$$

quantités.

Nombre N des quantités à calculer.

n nombre des inconnues	N pour la méthode de décomposition	N pour la méthode d'élimination
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
6	36	91
10	100	385
20	400	2870
50	2500	42925
100	10000	338350

Les auxiliaires qu'on détermine dans la méthode de décomposition demandent chacune en général plus d'opérations arithmétiques que dans la méthode d'élimination. D'autre part la commodité de la forme cracovienne des équations (2.3) et (2.4) facilite beaucoup les calculs.

§ 3. Passons maintenant à la solution indéterminée laquelle a déjà d'ailleurs fait l'objet de deux de nos récentes communications à l'Académie [1]), conçues plutôt en termes généraux. Le problème consiste à déterminer $\mathbf{A}^{-1}$, l'inverse de $\mathbf{A}$.

Étant donné que

$$\mathbf{A} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h},$$

on a

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{h}^{-1},$$

et le problème se réduit donc à la détermination des inverses de tableaux canoniques carrés.

$\mathbf{h}$ étant d'une forme plus générale (voir 1.C) que $\mathbf{g}$, nous allons nous occuper de l'inverse $\mathbf{h}^{-1}$ de $\mathbf{h}$, que nous désignons par $\mathbf{q}$. Il est facile de voir que les éléments de $\mathbf{q}$ au-dessus de la diagonale principale sont des zéros. On peut donc écrire

[1]) C. R. M. Ac. Pol., Cl. d. Sc. Math. et Nat., avril 1938 et mai 1938.

$$\mathbf{q}=\begin{Vmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ q_{12} & q_{22} & 0 & 0 & \dots 0 \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & 0 & \dots 0 \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & q_{44} & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1n} & q_{2n} & q_{3n} & q_{4n} & \dots q_{nn} \end{Vmatrix}.$$

On détermine les éléments quadratiques q_{ii} en se basant sur les unités du produit $\mathbf{q}\cdot\mathbf{h}=\mathbf{I}$ et l'on a ainsi $q_{ii}h_{ii}=1$ ou $q_{ii}=h_{ii}^{-1}$ $(i=1,2,\dots n)$.

On aura de proche en proche les éléments suivants de la colonne i de $\mathbf{q}$ du fait que cette colonne multipliée par chacune colonne suivante de $\mathbf{h}$ doit donner zéro. Comme $h_{kl}=0$ pour $l>k$, on trouve

$$q_{ik}=-\mathbf{I}\{q_{ii}\ q_{i,i+1}\dots q_{i,k-1}\}\cdot\mathbf{I}\{h_{ki}\ h_{k,i+1}\dots h_{k,k-1}\}h_{kk}^{-1}.$$

Par conséquent

$$\begin{Vmatrix} q_{12} & & & & \\ q_{13} & q_{23} & & & \\ q_{14} & q_{24} & q_{34} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1n} & q_{2n} & q_{3n} & & q_{n-1,n} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} q_{11} & & & \\ q_{12} & q_{22} & & \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{1,n-1} & q_{2,n-1} & q_{3,n-1} & q_{n-1,n-1} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -h_{21}h_{22}^{-1} & -h_{31}h_{33}^{-1} & -h_{41}h_{44}^{-1} & \dots -h_{n1}h_{nn}^{-1} \\ \cdot & -h_{32}h_{33}^{-1} & -h_{42}h_{44}^{-1} & \dots -h_{n2}h_{nn}^{-1} \\ \cdot & \cdot & -h_{43}h_{44}^{-1} & \dots -h_{n3}h_{nn}^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -h_{n,n-1}h_{nn}^{-1} \end{Vmatrix}. \quad (3.1)$$

On peut procéder soit en calculant successivement les éléments de n'importe quelle colonne de $\mathbf{q}$, soit en déterminant les lignes consécutives de $\mathbf{q}$.

§4. Exemple numérique. Considérons 4 équations à 4 inconnues:

$$\begin{aligned} 2x_1+\ 6x_2+14x_3+10x_4-\ 60&=0 \\ 7x_1+26x_2+39x_3+85x_4-310&=0 \\ 6x_1+14x_2+51x_3-\ 8x_4-105&=0 \\ 5x_1+13x_2+42x_3+12x_4-127&=0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nous allons déterminer ici: 1) les inconnues, 2) le déterminant du système, 3) l'inverse du tableau des coefficients (solution indéterminée).

Dans ce qui suit on a ajouté les colonnes des sommes de contrôle[1]) qui sont données *en italique.*

Avec les formules du §2 on obtient la décomposition suivante:

$$\begin{array}{c} \hfill \mathbf{S}_1 \\ \left|\begin{array}{rrrrrr} +2 & +6 & +14 & +10 & -60 & \mathit{28} \\ +7 & +26 & +39 & +85 & -310 & \mathit{-153} \\ +6 & +14 & +51 & -8 & -105 & \mathit{-42} \\ +5 & +13 & +42 & +12 & 127 & \mathit{55} \end{array}\right| \\ \text{Produit } \mathbf{A}' \qquad -278 \end{array} = \begin{array}{c} \hfill \mathbf{S}_2 \\ \left|\begin{array}{rrrrrr} +1 & +3 & +7 & +5 & -30 & \mathit{-14} \\ & +1 & -2 & +10 & -20 & \mathit{-11} \\ & & +1 & +2 & -5 & \mathit{-2} \\ & & & +1 & -2 & \mathit{-1} \end{array}\right| \\ \text{Facteur } \mathbf{g}' \end{array} \begin{array}{c} \hfill \mathbf{S}_3 \\ \left|\begin{array}{rrrrr} +2 & +7 & +6 & +5 & \mathit{+20} \\ & +5 & -4 & -2 & \mathit{-1} \\ & & +1 & +3 & \mathit{+4} \\ & & & +1 & \mathit{+1} \end{array}\right| \\ \text{Facteur } \mathbf{h} \end{array}.$$

On trouve $-278 = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3$ (contrôle)

1. A l'aide de $\mathbf{g}'$ on obtient successivement $x_4 = 2$, $x_3 = 1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 7$.

2. Le déterminant du système $|A| = 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 10$.

3. L'inverse $\mathbf{g}^{-1}$ s'obtient de (3.1) comme il suit

$$\begin{array}{c} \hfill \mathbf{S}_4 \\ \left|\begin{array}{rrrrr} 1 & & & & \mathit{+1} \\ -3 & 1 & & & \mathit{-2} \\ -13 & +2 & 1 & & \mathit{-10} \\ +51 & -14 & -2 & 1 & \mathit{+36} \end{array}\right| \\ \mathbf{g}^{-1} \end{array} \begin{array}{c} \hfill \mathbf{S}_5 \\ \left|\begin{array}{rrrr} -3 & -7 & -5 & \mathit{+16} \\ & +2 & -10 & \mathit{+9} \\ & & -2 & \mathit{+3} \\ & & & \mathit{+1} \end{array}\right| \\ \end{array}.$$

On a $\mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_5 = 4$ (contrôle) [4 = nombre des inconnues].

On calcule pareillement l'inverse $\mathbf{h}^{-1}$

$$\begin{array}{c} \hfill \mathbf{S}_6 \\ \left|\begin{array}{rrrrr} +0{\cdot}5 & & & & +0{\cdot}5 \\ -0{\cdot}7 & +0{\cdot}2 & & & -0{\cdot}5 \\ -5{\cdot}8 & +0{\cdot}8 & 1 & & -4{\cdot}0 \\ +13{\cdot}5 & -2{\cdot}0 & -3 & 1 & +9{\cdot}5 \end{array}\right| \\ \mathbf{h}^{-1} \end{array} \left|\begin{array}{rrr} -1{\cdot}4 & -6 & -5 \\ & +4 & +2 \\ & & -3 \\ & & \end{array}\right|.$$

On a $\mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_6 = 4$ (contrôle).

Il en résulte pour $\mathbf{A}^{-1}$, l'inverse du système:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{h}^{-1} = \begin{array}{c} \hfill \mathbf{S}_7 \\ \left|\begin{array}{rrrrr} +766{\cdot}5 & -201{\cdot}3 & -32{\cdot}8 & +13{\cdot}5 & \mathit{+545{\cdot}9} \\ -113{\cdot}0 & +29{\cdot}8 & +4{\cdot}8 & -2{\cdot}0 & \mathit{-80{\cdot}4} \\ -166{\cdot}0 & +44{\cdot}0 & +7{\cdot}0 & -3{\cdot}0 & \mathit{-118{\cdot}0} \\ +51{\cdot}0 & -14{\cdot}0 & -2{\cdot}0 & +1{\cdot}0 & \mathit{+36{\cdot}0} \end{array}\right| \\ \hfill \mathit{+383{\cdot}5} \end{array}.$$

$\mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_6 = +383{\cdot}5$ (contrôle)

$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_7 = -8$ (autre contrôle); $-8 = +4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

[1]) C. R. M. Ac. Pol., Cl. d. Sc. Math. et Nat., janvier 1938.

Tous les nombres employés dans le calcul, effectué à l'aide d'un arithmomètre, ont été écrits.

Le lecteur qui voudrait se convaincre de la valeur pratique de la méthode de décomposition avec des cracoviens est prié de faire les calculs comparatifs avec l'une des méthodes employées jusqu'à présent.

Quand à la comparaison avec la méthode d'élimination, on voit que la première ligne $\mathbf{g}'$ coïncide avec la première ligne des coefficients des équations (4.1), divisée par le coefficient de x_1, et la première ligne de $\mathbf{h}$ coïncide avec la première colonne de (4·1). Plus généralement la ligne k de $\mathbf{g}'$ coïncide avec la première ligne du système qu'on obtient de (4·1) après l'élimination de $k-1$ inconnues faite à l'aide de l'algorithme de Gauss étendu aux systèmes non symétriques, cette ligne étant divisée par le coefficient de x_k, et la ligne k de $\mathbf{h}$ coïncide avec les coefficients de la première colonne du même système.

§ 5. Considérons maintenant un cas particulier important, celui des équations normales de la méthode des moindres carrés.

Soient N équations observées indépendamment, portant sur n inconnues ($N > n$):

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + a_{i,\,n+1} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots N).$$

On détermine les inconnues d'après la condition que

$$F \equiv \sum_{i=1}^{N}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + a_{i,\,n+1})^2 = \text{Minimum.} \quad (5.1)$$

La condition (5.1) s'écrit à l'aide des cracoviens comme il suit: Posons

$$\mathbf{X} = \mathbf{I}\{x_1 \ \ x_2 \ldots x_n \ \ 1\} \qquad \sum_i \{a_{i1} \ \ a_{i2} \ldots a_{in} \ \ a_{i,n+1}\}^2 = \mathbf{A} \quad (5.\text{A})$$

L'équation (5.1) prend la forme

$$\sum \mathbf{X}\cdot\{a_{i1}\,a_{i2}\ldots a_{ik}\,a_{in+1}\}^2\cdot\mathbf{X} = \text{Minimum,}$$

ou bien

$$\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \text{Minimum.} \qquad (5.1\text{-bis})$$

$\mathbf{A}$ est symétrique, c'est-à-dire que $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$; on a donc

$$\mathbf{A} = \left\{\begin{array}{llllll} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} & A_{n+1,1} \\ '' & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} & A_{n+1,2} \\ '' & '' & A_{33} & \dots & A_{n3} & A_{n+1,3} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ '' & '' & '' & & & A_{n+1,n+1} \end{array}\right\}, \tag{5.B}$$

en désignant par ” les éléments égaux à leurs éléments symétriques.

Nous allons montrer ici comment on peut présenter $\mathbf{A}$ comme le carré, au sens du calcul des cracoviens, d'un tableau canonique $\mathbf{r}$ de même ordre, c'est-à-dire ayant $n+1$ colonnes et autant de lignes:

$$\mathbf{r} = \left\{\begin{array}{lllll} r_{11} & r_{21} & r_{31} & \dots & r_{n+1,1} \\ 0 & r_{22} & r_{32} & \dots & r_{n+1,2} \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & r_{n+1,3} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n+1,n+1} \end{array}\right\}. \tag{5.C}$$

Si l'on détermine un cracovien $\mathbf{r}$ de façon que son carré $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ reproduise les éléments de $\mathbf{A}$ au-dessus de la diagonale principale de $\mathbf{A}$ et sur cette diagonale, $\mathbf{r}$ sera la racine carrée cherchée $\sqrt{\mathbf{A}}$, puisque $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$ est symétrique, comme l'est $\mathbf{A}$. Il suffit donc de déterminer les éléments $r_{st} (s \geqslant t)$ d'après les A_{ik} écrits explicitement dans (5.B), c'est-à-dire pour $i \geqslant k$ $(k = 1, 2, \dots n+1)$.

La condition

$$\mathbf{A} = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$$

donne pour les éléments de la première ligne de $\mathbf{r}$ la relation

$$\{r_{11}\ \ r_{21}\ \ r_{31} \dots r_{n+1,1}\}\{r_{11}\} = \{A_{11}\ \ A_{21}\ \ A_{31} \dots A_{n+1,1}\}.$$

Comme A_{11}, égal à la somme des carrés $\sum\limits_i a_{i1}^2$, est un nombre positif, r_{11} diffère de zéro, et l'on peut déterminer tous les r_{i1}. On a $\sqrt{A_{11}} = r_{11}$ et

$$\{r_{21}\ \ r_{31} \dots r_{n+1,1}\} = \{A_{21} : r_{11}\ \ A_{31} : r_{11} \dots A_{n+1,1} : r_{11}\} \tag{5.3}$$

Pour la seconde ligne de $\mathbf{r}$ on a l'équation

$$\left\{\begin{array}{llll} r_{21} & r_{31} \dots r_{n1} & r_{n+1,1} \\ r_{22} & r_{32} \dots r_{n2} & r_{n+1,2} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} r_{21} \\ r_{22} \end{array}\right\} = \{A_{22}\ \ A_{32} \dots A_{n2}\ \ A_{n+1,2}\}. \tag{5.4}$$

On commence par déterminer r_{22} d'après l'équation

$$r_{22}^2 = A_{22} - r_{21}^2.$$

On peut démontrer facilement, ce que nous omettons ici, que du fait que **A** est une somme des carrés $\{a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{i,n+1}\}^2$, l'expression $A_{22} - r_{21}^2 = A_{22} - A_{21}^2 : A_{11}^2$ est aussi une somme de carrés. Il s'ensuit que r_{22}^2 est positif (et la même conclusion s'applique à $r_{33}^2, r_{44}^2, \dots r_{n+1,n+1}^2$), et l'équation (5.4) nous donnera en effet la seconde ligne de **r**. On calculera de la même manière consécutivement la troisième, la quatrième, etc. jusqu'à la dernière ligne de **r**.

r étant supposé obtenu, la forme quadratique (5.1) devient

$$F = \mathbf{X} \cdot \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Ir} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{X} = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Ir})^2,$$

ou bien

$$F = \left[\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & & r_{n,n} & 0 \\ r_{n+1,1} & r_{n+1,2} & & r_{n+1,n} & r_{n+1,n+1} \end{Bmatrix} \right]^2. \tag{5.5}$$

F est ainsi présenté comme la somme $(x_1 r_{11} + x_2 r_{21} + \dots + x_n r_{n1} + r_{n+1,1})^2 + (x_2 r_{22} + \dots + x_n r_{n2} + r_{n+1,2})^2 + \dots$ de $n+1$ carrés, dont le dernier est une constante positive, égale à $r_{n+1,n+1}^2$. Pour que F atteigne ce minimum, il faut et il suffit que les n premiers carrés deviennent zéros, ce qui donne les équations

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{11} & & \\ r_{21} & r_{22} & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots r_{n,n} \\ r_{n+1,1} & r_{n+1,2} & \dots r_{n+1,n} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ \\ 0 \end{Bmatrix}}_{n \text{ zéros}}, \tag{5.6}$$

permettant de calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \dots x_2$ et x_1.

La notion de la racine canonique carrée, au sens du calcul des cracoviens [1]), du tableau **A**, nous a permis d'obtenir les équations (5.6) par un algorithme plus simple que celui de G a u s s dans la *Disquisitio de elementis Palladis*, 1810, N° 13.

La formule (5.5), ou

$$F = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Ir})^2.$$

avec $\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{A}}$, résout ainsi le problème de la réduction de la forme quadratique F, caractérisée par son tableau **A**, à la somme de $n+1$ carrés.

$\mathbf{r}^{-2}$ nous donnerait la solution indéterminée. Pour le calcul effectif on peut modifier un peu les formules et l'on obtient le schéma que nous avons présenté au Congrès de Stockholm (1938) de l'Union Astronomique Internationale, ou des schémas similaires qui seront insérés dans notre travail sur la méthode des moindres carrés dans les *Acta Astronomica.*

§ 6. Dans ce qui précède nous avons admis la décomposition du Tableau donné $\mathbf{A}$ en deux facteurs canoniques ayant pour éléments des nombres ordinaires. Toutefois rien n'empêche de supposer que les éléments g_{ik} et h_{ik} soient eux-mêmes non des nombres ordinaires, mais des nombres composés — des cracoviens — les unités 1 ordinaires de la diagonale principale de $\mathbf{g}$ devant être alors remplacées par les $\mathbf{I}$-s (les *idems*). Le principe de la décomposition de $\mathbf{A}$ restera le même, et la décomposition pourra être utilisée de semblable manière pour la résolution numérique des équations linéaires, pour le calcul des déterminants et la détermination des inverses. Déjà certains de nos travaux antérieurs sur les deux derniers problèmes étaient basés sur une pareille décomposition (dans le cas de deux zones dans $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$), qui a apparu alors comme un *deus ex machina*, mais le nombre arbitraire des zones de $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$, introduit ici, et l'application à la résolution numérique des équations, présentent maintenant la méthode sous un autre aspect, en la rendant en même temps plus générale et plus puissante. En particulier la formule $D = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{D}_1|$ pour le déterminant n'est qu'un cas particulier de la formule $D = |\mathbf{h}_{11}| \cdot |\mathbf{h}_{22}| \cdot |\mathbf{h}_{33}| \ldots |\mathbf{h}_{nn}|$ qui doit être considérée, à l'état actuel de nos connaissances, comme la meilleure formule pour le calcul numérique des déterminants.

La formule finale (1.4) du problème des équations linéaires rappelle bien la formule (3 bis) de la p r e m i è r e méthode de notre travail »Sur la résolution numérique d'un système d'équations linéaires[2]«). On pourrait traiter aussi à un nouveau point de vue la s e c o n d e méthode du travail mentionné.

[1]) Cette extraction de la racine carrée de $\mathbf{A}$ ne s'exprime dans le langage des matrices que par une équation à satisfaire, $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{A}$, où $\mathbf{r}'$ désigne $\mathbf{r}$ transposé.

[2]) Bull. Ac. Pol. Sc. et Lettr., Cl. d. Sc. Math. et Nat., 1937, 350—354.