Przestrzeń w nauce współczesnej

Tom 3

Pod redakcją
STEFANA SYMOTIUKA
GRZEGORZA NOWAKA

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
LUBLIN 2000

SPIS TREŚCI

Zachęta do lektury: o potrzebie wyobraźni 7

ANDRZEJ KRASIŃSKI, Co to jest przestrzeń i w jakiej przestrzeni żyjemy (punkt widzenia fizyka niekwantowego) 11

KAROL I. WYSOKIŃSKI, Struktura przestrzeni a własności obiektów kwantowych 25

ANDRZEJ KUCZUMOW, Naturalne struktury okresowe jako „przechowalniki" czasu i danych o środowisku 35

JERZY DZIK, Biologiczny sens przestrzennej formy muszli 45

ZOFIA KOLBUSZEWSKA, Fraktale w literaturze 59

MAREK WOLF, Prawo Zipfa, samopodobieństwo i muzyka 69

WIESŁAW A. KAMIŃSKI, Geometryczne właściwości przestrzeni fazowej sieci neuronowych 79

ZDZISŁAW CACKOWSKI, Przestrzeń rzeczy/percepcji a przestrzeń języka/symboli 87

ANDRZEJ KRASIŃSKI

CO TO JEST PRZESTRZEŃ I W JAKIEJ PRZESTRZENI ŻYJEMY

(punkt widzenia fizyka niekwantowego)

1. CO TO JEST PRZESTRZEŃ?

Pojęcie przestrzeni wywodzi się z matematyki i razem z nią rozwijało się z upływem czasu. Dla starożytnych klasyków geometrii był to po prostu świat wokół nas, a geometria Euklidesa miała odwzorowywać pewne własności tego świata w swoich aksjomatach i definicjach oraz przewidywać inne własności w twierdzeniach. Dziś każdy matematyk i każdy fizyk-teoretyk potrafi na poczekaniu wymienić nazwy kilkudziesięciu przestrzeni; skorowidz do *Topologii ogólnej* R. Engelkinga [1] zawiera listę 90 nazw przestrzeni. W każdej z tych nazw słowo „przestrzeń" (z dodanym przymiotnikiem) ma inne znaczenie. Definicja ogólnego pojęcia przestrzeni, bez żadnego przymiotnika zawężającego znaczenie, nie jest więc oczywista. Amerykańska encyklopedia matematyczna dla inżynierów [2] podaje taką definicję:

> Określenie „przestrzeń" jest używane w matematyce dla dowolnego zbioru, gdy chcemy dyskutować pewne rodzaje jego własności albo gdy mamy zamiar używać jakiejś terminologii geometrycznej. Oto przykłady typów własności, które można dyskutować w ten sposób; przy każdym z nich podano odpowiednie typy przestrzeni: ciągłość i zbieżność – przestrzeń topologiczna, odległość i kąty – przestrzeń euklidesowa, liniowość, nachylenie – przestrzenie afiniczne, rzutowe i wektorowe. Inne przykłady, szczegółowo opisane w odpowiednich artykułach, to: topologiczne przestrzenie liniowe, przestrzenie Banacha i Hilberta, przestrzenie metryczne.

---

[1] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1976.

[2] *Encyclopaedic Dictionary of Mathematics for Engineers and Applied Scientists*, red. I. Sneddon, Pergamon Press, Oxford 1976, s. 616.

Radziecka encyklopedia matematyczna przeznaczona dla matematyków[3] podaje znacznie dłuższą definicję, z której zacytujemy tylko fragmenty:

Przestrzeń — logicznie dopuszczalny model (albo struktura), będący środowiskiem, w którym realizujemy inne modele oraz różne konstrukcje. Na przykład w geometrii elementarnej płaszczyzna lub przestrzeń są środowiskiem, w którym budujemy rozmaite figury. [...] Ogólne pojęcie przestrzeni w matematyce powstało w wyniku uogólnień i modyfikacji pojęć geometrii euklidesowej. [...] W dzisiejszej matematyce przestrzeń definiuje się jako zbiór dowolnych obiektów, które nazywamy punktami przestrzeni; mogą być nimi figury geometryczne, funkcje, stany układu fizycznego itd. Gdy traktujemy ich zbiór jako przestrzeń, abstrahujemy od wszelkich ich własności i uwzględniamy tylko te własności zbioru, które są określone przez definicję przestrzeni albo przez osobne definicje. Relacje między punktami albo figurami [...] określają, „geometrię" przestrzeni.

Widać, szczególnie z drugiego cytatu, że zdefiniowanie ogólnego pojęcia przestrzeni nie jest zadaniem prostym. Definicja ta odwołuje się do pojęcia zbioru, które w matematyce uważa się za pierwotne, tzn. nie wymagające definiowania. Dla naszych potrzeb przyjmiemy następującą krótką definicję przestrzeni: jest to zbiór, w którym wprowadzono pewne relacje geometryczne za pomocą dodatkowych definicji.

Definicja ta jest tak ogólna, że dopuszcza wielką liczbę realizacji i nie stawia ograniczeń ludzkiej fantazji w wynajdywaniu nowych geometrii.

2. PRZYKŁADY PRZESTRZENI UŻYWANYCH W DZISIEJSZEJ MATEMATYCE I FIZYCE

Aby przekonać się, jaki użytek zrobiła ludzka fantazja ze swobody zawartej w przedstawionej definicji, podamy przykłady kilku najważniejszych przestrzeni występujących w matematyce i fizyce.

2.1. PRZESTRZEŃ EUKLIDESA

Jest to historycznie najstarszy przykład abstrakcyjnej przestrzeni matematycznej i równocześnie najstarszy przykład matematycznego modelu przestrzeni fizycznej. Definicją geometrii Euklidesa jest zbiór jego sławnych pewników oraz zbiór definicji pojęć podstawowych, takich jak: okrąg, kąt, trójkąt, odległość. Własnością, która wyróżnia przestrzeń Euklidesa spośród innych przestrzeni metrycznych (patrz niżej), jest twierdzenie Pitagorasa. W języku dzisiejszej geometrii różniczkowej twierdzenie to rozumiemy jako zapewnienie, że przestrzeń Euklidesa jest płaska. (Określenie „przestrzeń płaska" ma swoją ścisłą

[3] *Matematiczeskaja enciklopedia,* red. I. M. Winogradow, t. 4, Izdatelstwo „Sowietskaja Enciklopedia", Moskwa 1984, s. 712.

matematyczną definicję, ale nie będziemy jej opisywać, aby nie wydłużać niniejszego artykułu.)

2.2. N-WYMIAROWA PRZESTRZEŃ EUKLIDESOWA

Jest to dość oczywiste uogólnienie pojęcia przestrzeni Euklidesa, polegające na dopuszczeniu dowolnej liczby wymiarów. Uogólnienie to jest przydatne np. do znajdowania i interpretowania rozwiązań układów równań algebraicznych i różniczkowych.

2.3. PRZESTRZEŃ METRYCZNA

Jest to bardzo duża klasa przestrzeni. W przestrzeni metrycznej istnieje pojęcie odległości, ale zdefiniowane w sposób abstrakcyjny za pomocą trzech aksjomatów. Odległość $d(p, q)$ pomiędzy punktami p i q przestrzeni metrycznej musi mieć własności następujące:

(a) $d(p, q) = d(q, p)$ (symetria),
(b) $d(p, q) + d(q, r) > d(p, r)$ (nierówność trójkąta),
(c) $(d(p, q) = 0) \Leftrightarrow (p = q)$ (odległość jest niezdegenerowana).

Przykład nieeuklidesowej definicji odległości: Niech punkty p i q mają współrzędne (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2). Definiujemy:

$$d(p, q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|.$$

Przestrzenie używane w teorii względności nie są przestrzeniami metrycznymi, ponieważ nie posiadają własności (c).

2.4. PRZESTRZEŃ FUNKCJI CIĄGŁYCH NA ODCINKU $[a, b]$

Ciekawą własność tej przestrzeni stanowi fakt, że ma ona nieskończoną liczbę wymiarów. Jej pojedynczym wymiarem jest zbiór wartości wszystkich funkcji ciągłych w ustalonym punkcie odcinka $[a, b]$. Liczba wymiarów jest nieskończona, ponieważ liczba punktów w odcinku jest nieskończona. Można w tej przestrzeni zdefiniować odległość między funkcjami f_1 i f_2 jako:

$$d(f_1, f_2) = \max_{x \in [a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Po przyjęciu takiej definicji przestrzeń funkcji ciągłych staje się przestrzenią metryczną.

2.5. PRZESTRZEŃ WEKTOROWA

Jest to przestrzeń, której punktami są wektory. W przestrzeni wektorowej porównujemy kierunki różnych wektorów i potrafimy stwierdzić, kiedy mają kierunek ten sam. W przestrzeni euklidesowej (która jest też przestrzenią wektorową) mamy zdefiniowany iloczyn skalarny dwu wektorów $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$v_1 \cdot v_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Za pomocą iloczynu skalarnego można zdefiniować pojęcia długości wektora $\|v\|$ oraz kąta α między wektorami v_1 i v_2 w sposób następujący:

$$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cos \alpha.$$

Ostatnia z tych równości jest w przestrzeni euklidesowej tożsamością, ale w innych przestrzeniach może być użyta jako definicja kąta α.

2.6. PRZESTRZEŃ UNORMOWANA

Jest to uogólnienie przestrzeni wektorowej. W przestrzeni tej norma (tzn. długość wektora) jest zdefiniowana abstrakcyjnie przez cztery aksjomaty:

(a) $\|v\| \geqslant 0$ dla każdego v.

(b) $\|av\| = |a| \|v\|$, gdzie a jest liczbą, rzeczywistą.

(c) $\|v_1+v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\|$.

(d) $(\|v\| = 0) \Leftrightarrow (v = 0)$.

2.7. PRZESTRZEŃ BANACHA

Jest to przestrzeń unormowana zupełna, tzn. taka, w której zawarte są granice wszystkich ciągów $v_1, v_2, v_3, \ldots$.

2.8. PRZESTRZEŃ HILBERTA

Jest to przestrzeń Banacha, której punktami są fukcje spełniające warunek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dz < \infty,$$

norma zaś jest zdefiniowana przez:

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx.$$

Z punktu widzenia matematyki, mechanika kwantowa jest geometrią przestrzeni Hilberta.

2.9. PRZESTRZEŃ RIEMANNA

Jest to taka n-wymiarowa przestrzeń metryczna, w której odległość dwu bliskich punktów $p_1 = (x_1, ..., x_n)$ i $p_2 = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, ..., x_n)$ jest określona przez formę kwadratową, w różniczkach $dx_1, ..., dx_n$, tzn.:

$$d^2(p_1,p_2) = g_{11}(dx_1)^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + ... + 2g_{1n}dx_1dx_n + g_{22}(dx_2)^2 + ... + 2g_{2n}dx_2dx_n$$

$$+ g_{n-1,n-1}(dx_{n-1})^2 + 2g_{n-1,}dx_{n-1} + g_{nn}(dx_n)^2 \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} g_{ij}(x^1, ..., x_n)dx_i\,dx_j,$$

gdzie wszystkie g_{ij} są funkcjami zmiennych $(x_1, ... x_n)$, przy czym $g_{ij} \equiv g_{ij}$. W przestrzeni euklidesowej $g_{ij} = 1$, gdy $i = j$ i $g_{ij} = 0$, gdy $i \neq j$. Wtedy:

$$d^2(p_1, p_2) = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + ... + (dx_n)^2.$$

Bardzo prostym zastosowaniem geometrii Riemanna są pomiary na krzywych dwuwymiarowych powierzchniach, np. geodezja na powierzchni Ziemi.

3. MODELE PRZESTRZENI W OGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

Aż do początku XX wieku było dla wszystkich rzeczą oczywistą, że nasza przestrzeń musiała być trójwymiarową przestrzenią euklidesową, pojemnikiem na materię. Ogólniejsze definicje przestrzeni były rozpatrywane przez matematyków już od pierwszej połowy XIX wieku, ale poza matematyką uważano te spekulacje za nierealistyczne. Własnościami materii zajmowała się fizyka, przestrzeń zaś była od materii niezależna i służyła tylko do rejestrowania położeń cząstek.

W XX wieku dokonały się w tym poglądzie dwie rewolucje, obydwie za sprawą Einsteina. Pierwszą było wprowadzenie w roku 1909 przestrzeni Minkowskiego, która jest geometrycznym opisem szczególnej teorii względności, drugą – opublikowanie w roku 1915 ogólnej teorii względności.

Geometria przestrzeni Minkowskiego zdefiniowana jest podobnie do geometrii Riemanna. Dla pary punktów o współrzędnych (t, x, y, z) i $(t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ definiujemy formę kwadratową $\Phi(p_1, p_2)$:

$$\Phi(p_1\,p_2) = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \qquad (*)$$

gdzie c jest prędkością światła. Widać, że dla niektórych par punktów wartość tej formy będzie dodatnia, dla niektórych ujemna, będą też istniały takie pary $p_1 \neq p_2$, dla których $\Phi(p_1, p_2) = 0$. Funkcja Φ nie jest więc odległością, a przestrzeń Minkowskiego nie jest przestrzenią, metryczną.

Punkty czterowymiarowej przestrzeni Minkowskiego nazywamy zdarzeniami, współrzędną t – czasem, współrzędne (x, y, z) – współrzędnymi przestrzennymi. Jeśli $\Phi(p_1, p_2) > 0$, to mówimy, że zdarzenia p_1 i p_2 są w relacji czasowej. Jak widać ze wzoru (*), można wtedy wysłać z punktu p_1 do punktu p_2 (lub odwrotnie) cząstkę materii, która będzie poruszała się z prędkością mniejszą od prędkości światła. Można też wtedy tak zmienić układ współrzędnych, aby w nowych współrzędnych (t', x', y', z') wartość formy (*) pozostała niezmieniona, ale zdarzenia p_1 i p_2 miały te same współrzędne przestrzenne, tzn. $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$. Różnica współrzędnych czasowych, $\Delta t' = \sqrt{\Delta(p_1, p_2)}/c$ jest wtedy czasem, jaki upływa od zdarzenia p_1 do zdarzenia p_2.

Jeśli $\Phi(p_1, p_2) < 0$, to mówimy, że zdarzenia p_1 i p_2 są w relacji przestrzennej. Podróż od p_1 do p_2 wymagałaby wtedy poruszania się z prędkością większą od prędkości światła, co, jak wiadomo z teorii względności, jest niemożliwe. W tym przypadku można wybrać nowy układ współrzędnych tak, aby $\Delta t' = 0$, tzn. aby zdarzenia p_1 i p_2 były w tym układzie równoczesne. Wtedy:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{-\Phi(p_1, p_2)} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}$$

jest odległością od zdarzenia p_1 do zdarzenia p_2.

Jeśli $\Phi(p_1, p_2) = 0$, ale $p_1 \neq p_2$, to zdarzenia p_1 i p_2 można połączyć sygnałem świetlnym podróżującym przez przestrzeń swobodnie, tzn. bez użycia zwierciadeł ani światłowodów.

Jeśli ustalimy zdarzenie p_1, to zbiór zdarzeń p, które można połączyć z p_1 swobodnym sygnałem świetlnym, spełnia równanie:

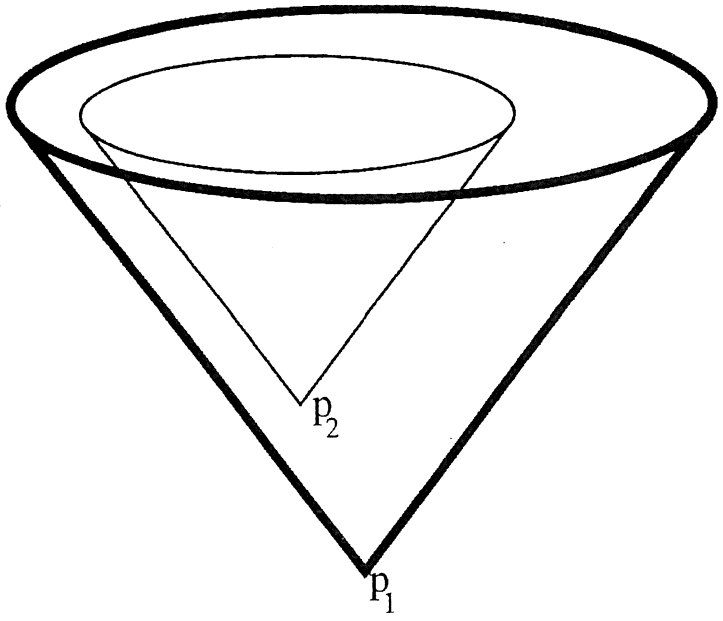
$$c^2(t-t_1)^2 - (x-x_1)^2 - (y-y_1)^2 - (z-z_1)^2 = 0.$$

Gdyby zbiór zdarzeń (t, x, y, z) był przestrzenią euklidesową, to powyższe równanie opisywałoby trójwymiarową powierzchnię stożka obrotowego o osi danej przez $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$ i wierzchołku w punkcie $(t, x, y, z) = (t_1, x_1, y_1, z_1)$. W przestrzeni Minkowskiego zbiór ten nazywamy, przez analogię, stożkiem świetlnym.

Przestrzeń Minkowskiego służy do opisu zjawisk zachodzących w przestrzeni wolnej od pól grawitacyjnych, w szczególności zaś do opisu obserwowalnych skutków przejścia od jednego układu współrzędnych O do innego układu O', poruszającego się względem O ruchem jednostajnym i prostoliniowym, tzn. bez przyspieszeń. Przy takich przejściach zmieniają się odległości i odstępy czasu

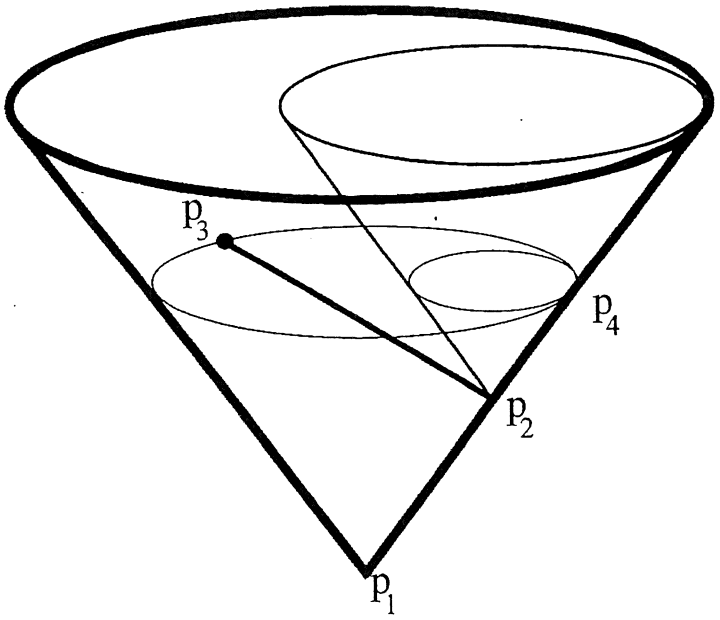
między różnymi zdarzeniami. Jedynym elementem absolutnym przestrzeni Minkowskiego są stożki świetlne: wszyscy obserwatorzy, niezależnie od prędkości, z jaką się poruszają, skonstruują ten sam stożek świetlny dla danego zdarzenia p_1. Ta absolutność stożka świetlnego jest geometrycznym obrazem faktu (sprawdzonego doświadczalnie), że prędkość światła jest dla każdego obserwatora poruszającego się bez przyspieszeń taka sama, niezależna od prędkości obserwatora. Znana nam ze szkoły geometria Euklidesa obowiązuje w przestrzeni Minkowskiego na płaszczyznach stałego czasu $t = \text{const}$.

Aby podkreślić modyfikacje, jakie do tego obrazu wprowadza ogólna teoria względności, kilka charakterystycznych własności stożków świetlnych w przestrzeni Minkowskiego zostało zilustrowanych na ryc. 1–3. Żadne z pięciu stwierdzeń zawartych w podpisach do tych rysunków nie jest prawdziwe w ogólnej teorii względności.



Ryc. 1. W przestrzeni Minkowskiego, jeśli zdarzenie p_2 leży wewnątrz przyszłego stożka świetlnego zdarzenia p_1, to przyszłe stożki świetlne zdarzeń p_1 i p_2 nie przecinają się. Stożki świetlne wszystkich zdarzeń są izometryczne. Pojedynczy stożek świetlny nie przecina się sam ze sobą nigdzie poza wierzchołkiem

Geometria, która leży u podstaw ogólnej teorii względności, jest zdefiniowana przez formę kwadratową, podobną jak w przestrzeniach Riemanna i Minkowskiego. Jej współczynniki są funkcjami współrzędnych tak jak w przestrzeni Riemanna, ale jej wartości mogą być ujemne lub zerowe dla niepokrywających się par zdarzeń, tak jak w przestrzeni Minkowskiego. Fizycy nie mają oporów przeciwko nazywaniu takiej geometrii geometrią Riemanna,



Ryc. 2. Jeśli zdarzenia p_2, p_3 i p_4 w przestrzeni Minkowskiego leżą na przyszłym stożku świetlnym tego samego zdarzenia p_1, to mogą być między sobą w relacji przestrzennej (jak para (p_2, p_3) na rysunku) albo zerowej (para (p_2, p_4) na rysunku), nigdy w czasowej. Są one w relacji zerowej (tzn. $\Phi(p_2, p_4) = 0$) tylko wtedy, gdy leżą na tej samej tworzącej stożka

ale matematycy zwykle protestują i naciskają, aby nazywać ją geometrią pseudoriemannowską[4].

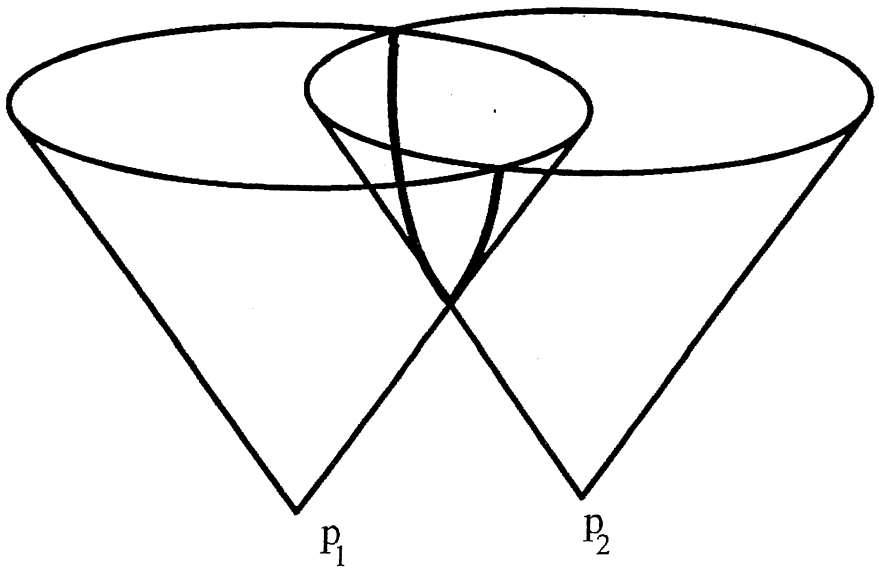
Podstawowa forma kwadratowa geometrii pseudoriemannowskiej nazywa się formą metryczną i ma następującą postać:

$$\Phi(p_1, p_2) = g_{00}(\mathrm{d}t)^2 + 2g_{01}\mathrm{d}t\mathrm{d}x + 2g_{02}\mathrm{d}t\mathrm{d}y + 2g_{03}\mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

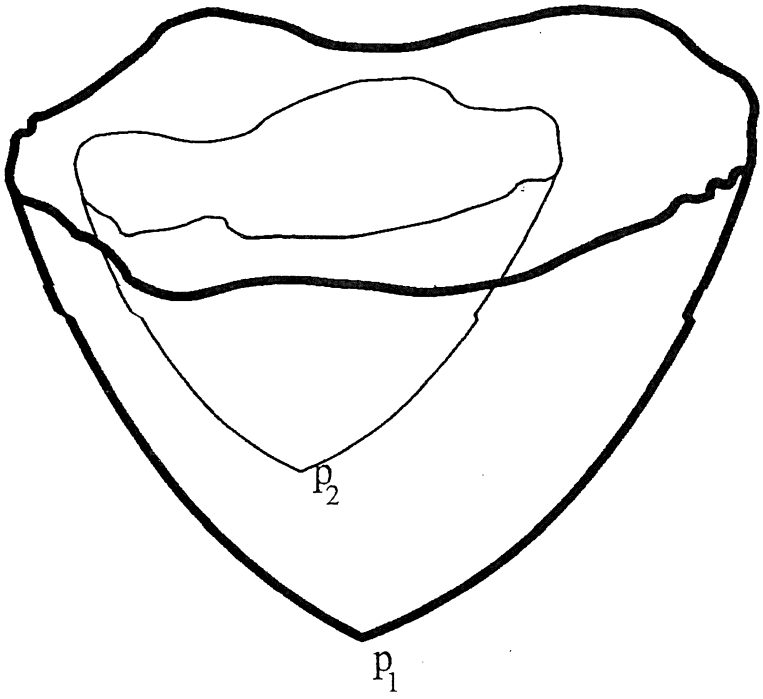
$$+ g_{11}(\mathrm{d}x)^2 + 2g_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2g_{13}\mathrm{d}x\mathrm{d}z + g_{22}(\mathrm{d}y)^2 + 2g_{23}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g_{33}(\mathrm{d}z)^2.$$

W każdym ustalonym punkcie $p_0 = (t_0, x_0, y_0, z_0)$ można tak wybrać współrzędne, aby $g_{00} = 1, g_{11}(p_0) = g_{22}(p_0) = g_{33}(p_0) = -1$, pozostałe $g_{ij}(p_0) = 0$. W tym jednym punkcie forma metryczna ma taką samą postać jak w przestrzeni Minkowskiego, ale już w dowolnie bliskich punktach funkcje g_{ij} będą miały inne wartości. Geometrycznie oznacza to, że przestrzeń występująca w ogólnej teorii względności (nazywana czasoprzestrzenią) jest zakrzywiona, ale w każdym jej punkcie można skonstruować płaską przestrzeń Minkowskiego, styczną do

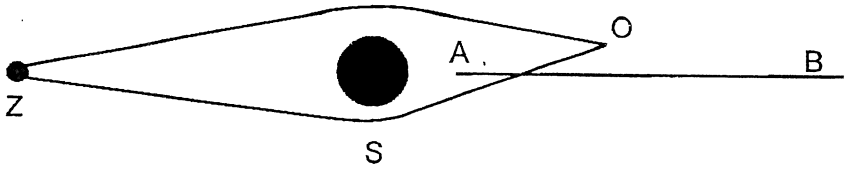
[4] Nawiasem mówiąc, niektórzy matematycy podejrzewają fizyków o bezmyślne przenoszenie twierdzeń z właściwej geometrii Riemanna do geometrii pseudoriemannowskiej. Jako przedstawiciel fizyków zapewniam, że podejrzenie to jest niesłuszne. Wiele twierdzeń właściwej geometrii Riemanna po prostu zachowuje prawdziwość także w geometrii pseudoriemannowskiej, ponieważ nie zależą one od założenia $\Phi(p_2, p_2) \geqslant 0$. Ich prawdziwość została sprawdzona w każdym przypadku.



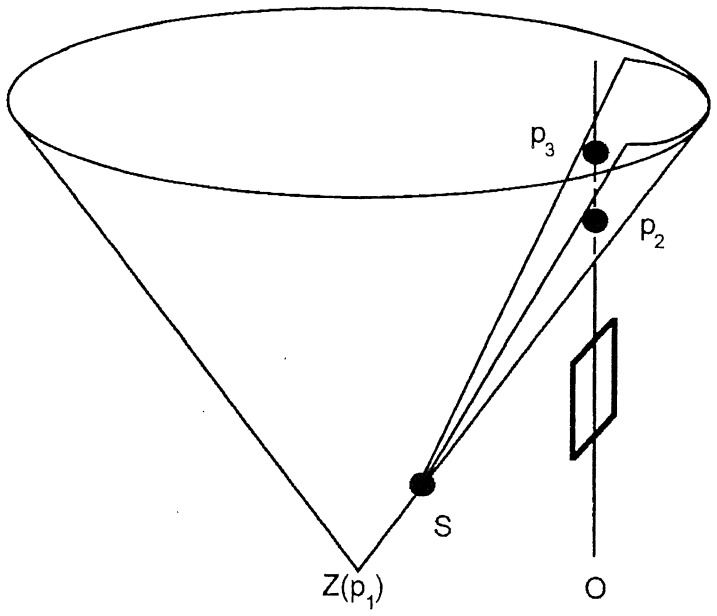
Ryc. 3. Jeżeli w przestrzeni Minkowskiego zdarzenie p_2 leży na zewnątrz stożka świetlnego zdarzenia p_1, to przyszłe stożki świetlne zdarzeń p_1 i p_2 przecinają się ze sobą. Również przeszłe stożki świetlne tych zdarzeń przecinają się. Oznacza to, że istnieje taki zbiór zdarzeń przyszłych, do których można wysłać sygnały świetlne z p_1 i p_2 (zaznaczony na rysunku grubszą, linią,) oraz taki zbiór zdarzeń przeszłych, z których sygnały świetlne dotrą do p_1 i p_2



Ryc. 4. W zakrzywionej czasoprzestrzeni pseudoriemannowskiej stożki świetlne różnych zdarzeń na ogół nie są izometryczne

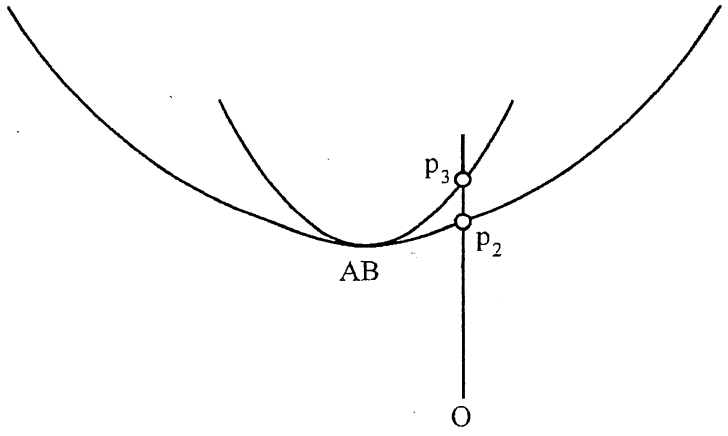


Ryc. 5. Newtonowski schemat otoczenia soczewki grawitacyjnej S. Prosta AB jest osią symetrii układu przechodzącą przez źródło światła Z i środek soczewki S. Do obserwatora O leżącego blisko osi symetrii, ale nie na niej, sygnały świetlne wysłane ze źródła Z równocześnie w dwu różnych kierunkach docierają nierównocześnie. Obserwator widzi dwa obrazy źródła

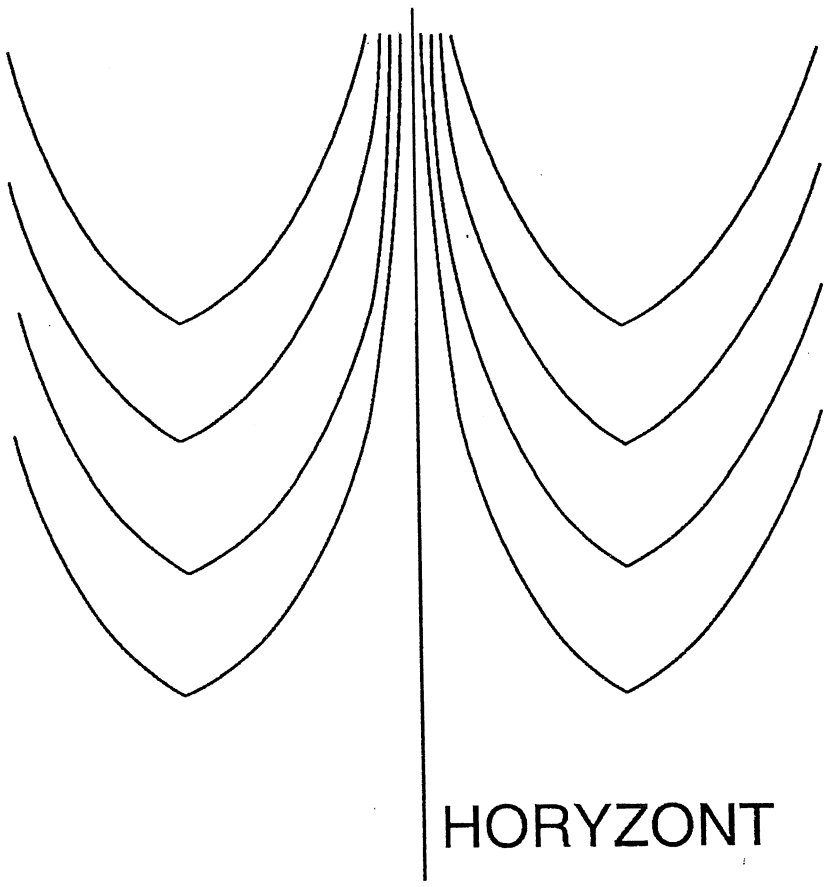


Ryc. 6. Opis sytuacji z rys. 5 w języku teorii względności. Przyszły stożek świetlny zdarzenia p_1 należącego do historii źródła Z przecina się sam ze sobą poza lini reprezentującą historię soczewki S. Stożek ten ma brzeg, jeśli soczewka S jest nieprzezroczysta i ma średnicę znacznie większą niż 3/2 średnicy czarnej dziury o tej samej masie. Dla mniejszych soczewek obraz jest dużo bardziej skomplikowany (promienie świetlne mogą wykonywać pewną liczbę obiegów wokół soczewki przed dotarciem do obserwatora). Zdarzenia p_2 i p_3, leżące na różnych płatach stożka C, pokazanego na rysunku, mogą być między sobą w relacji czasowej – na rysunku leżą one na prostej O przedstawiającej historię obserwatora O z ryc. 5. Ryc. 7 przedstawia przecięcie stożka C z płaszczyzną widoczną na rysunku. Przyszły stożek świetlny zdarzenia leżącego wewnątrz stożka C na linii reprezentującej źródło Z i blisko punktu p_1, będzie przecinał się z C (obserwator umieszczony w dowolnym punkcie na tym przecięciu będzie odbierał równocześnie sygnały świetlne wysłane ze źródła w różnych chwilach)

zakrzywionej czasoprzestrzeni. W małym otoczeniu punktu p_0 własności krzywej czasoprzestrzeni są w przybliżeniu takie same jak własności przestrzeni Minkowskiego, ale nie jest to prawdą dla otoczeń dużych. Czy dane otoczenie jest małe, czy duże, to zależy od pomiarów, które chcemy wykonać: „wielkość" otoczenia, które jeszcze można uważać za małe, zależy od dokładności pomiaru.



Ryc. 7. Przekrój stożka z ryc. 6 płaszczyzną zawierającą prostą O. W punkcie AB stożek przecina się sam ze sobą (jest to obraz pewnego punktu osi AB z ryc. 5). Zdarzenia p_2 i p_3, leżące na przyszłym stożku świetlnym tego samego zdarzenia p_1, leżą na prostej O przedstawiającej historię pewnego obserwatora, a więc są między sobą w relacji czasowej



Ryc. 8. Jeżeli zdarzenie p_2 leży na zewnątrz przyszłego stożka świetlnego zdarzenia p_1 w zakrzywionej czasoprzestrzeni, to przyszłe stożki świetlne tych zdarzeń nie zawsze muszą się przecinać. W zakrzywionych czasoprzestrzeniach mogą istnieć horyzonty. Obserwatorzy umieszczeni po przeciwnych stronach horyzontu nie zaobserwują się nawzajem nigdy

W krzywej czasoprzestrzeni również można wyróżnić relacje czasowe, przestrzenne i zerowe między zdarzeniami i można konstruować stożki świetlne. Stożki te są także krzywe i stąd biorą się odstępstwa od wymienionych w podpisach do ryc. 1–3 własności stożków w przestrzeni Minkowskiego. Różne możliwe własności stożków świetlnych w krzywych czasoprzestrzeniach są, zilustrowane na ryc. 4–8. Czasoprzestrzenie używane jako modele rzeczywistych sytuacji fizycznych i astronomicznych są uproszczone i dostosowane do opisu tylko pewnych aspektów rzeczywistości (patrz zakończenie niniejszego atykułu). Dlatego nie rozpatruje się czasoprzestrzeni, w których wszystkie sytuacje z rys. 4–8 występowałyby równocześnie. Dla każdej ze zilustrowanych tam sytuacji istnieje jednak znany teoretykom model, który tę sytuację zawiera.

4. JAKA JEST NASZA „PRAWDZIWA" PRZESTRZEŃ?

Jak widać z rozważań, teoria względności oferuje nam różne możliwości do wyboru. Która z nich została zrealizowana w przyrodzie?

Odpowiedź na to pytanie nie jest jednoznaczna i sformułowana nakrócej brzmiałaby tak: w różnych sytuacjach fizycznych przydatne są różne modele. Gdy chcemy opisywać cały Wszechświat jako układ fizyczny, musimy zapomnieć, że składa się on z wielkiej liczby gromad galaktyk, z których każda zawiera wiele pojedynczych galaktyk, z których każda zawiera miliardy gwiazd i wielką ilość rozproszonej materii itd. Musimy założyć, że materia we Wszechświecie rozłożona jest w sposób ciągły i że rozkład jej gęstości jest opisywany funkcją prostą. Każdy dokładniejszy model byłby zbyt skomplikowany matematycznie i nie umielibyśmy rozwiązać w nim żadnego problemu. Brak zresztą danych, aby ustalić parametry tak dokładnego modelu. Na przykład, tylko dla jednej gwiazdy w całym Wszechświecie znamy masę i rozmiary z zadowalającą dokładnością. W powszechnie dziś używanych modelach Wszechświata gęstość materii jest taka sama w całej przestrzeni i zmienia się tylko z czasem. Modele tego typu różnią się między sobą tylko relacją prędkości rozszerzania się do obecnej gęstości materii. Są one wystarczające do wielu celów, ale np. nie istnieją w nich soczewki grawitacyjne. W niektórych z nich natomiast istnieją horyzonty (patrz ryc. 8).

Ponieważ soczewki grawitacyjne są obserwowane, trzeba opisywać je przy użyciu innych modeli. Tu sytuacja jest całkiem niezadowalająca. Źródła światła w obserwowanych soczewkach (kwazary) leżą daleko od nas w skali kosmologicznej, tory promieni w tych soczewkach powinny więc być opisywane w języku ogólnej teorii względności. Mimo to, ze względu na skomplikowaną geometrię zjawiska, astronomowie używają przybliżeń zapożyczonych z optyki geometrycznej w przestrzeni euklidesowej.

Jeśli chcemy opisywać orbity planet i tory promieni świetlnych w otoczeniu pojedynczej gwiazdy (lub czarnej dziury), zakładamy, że gwiazda ta (czarna dziura) jest jedynym masywnym obiektem w całej czasoprzestrzeni. Model soczewki grawitacyjnej z ryc. 6 i 7 oparty jest na takiej właśnie geometrii. Do wielu celów wystarcza model, w którym samotna gwiazda jest sferycznie symetryczna. (Uwzględnienie ruchu obrotowego gwiazdy i związanej z nim deformacji geometrii prowadzi do uciążliwych utrudnień we wszystkich obliczeniach.) W takim właśnie modelu obliczono anomalie ruchu orbitalnego Merkurego oraz kąt ugięcia promieni świetlnych przez Słońce; wyjaśnienia obydwu tych efektów były pierwszymi sukcesami teorii Einsteina.

Obliczenia oparte na ogólnej teorii względności są zawsze skomplikowane. W tych sytuacjach, w których można zaniedbać wpływ pola grawitacyjnego, ale prędkości badanych obiektów są dużym ułamkiem prędkości światła, wystarczająco dokładnym modelem przestrzeni jest przestrzeń Minkowskiego. Jest on skutecznie stosowany w fizyce cząstek elementarnych, np. do opisu ruchu cząstek w akceleratorze albo do obliczania czasu życia nietrwałych cząstek poruszających się z dużą prędkością.

Wreszcie, do prawie wszystkich celów życia codziennego i do prawie wszystkich badań naukowych dotyczących Ziemi i Układu Słonecznego wystarczająco dokładny jest model oparty na staroświeckiej geometrii Euklidesa i mechanice Newtona. Na podstawie tego modelu mogę z całkowicie zadowalającą dokładnością przewidzieć, ile czasu zajmie mi powrót do domu z tego sympozjum. Ale... W nawigacji (morskiej, lotniczej, również czasem w lądowej) coraz powszechniej stosowany jest satelitarny system GPS (Global Positioning System). Dokładne działanie tego systemu wymaga bardzo dokładnie zsynchronizowanych zegarów, a do ich synchronizacji używa się fal elektromagnetycznych. Gdyby w synchronizacji zapomniano o efektach przewidzianych przez teorię względności, powstawałyby błędy w wyznaczeniu pozycji nawigatora, kumulujące się z czasem[5]. Po upływie jednej doby błędy te sięgałyby od ok 10 m (skutek niesferyczności Ziemi lub ruchu nawigatora w samolocie z prędkością ok. 1000 km/godz.) do 18 km (!) (skutek zmian częstotliwości fal elektromagnetycznych biegnących przez pole grawitacyjne Ziemi). Teoria względności wkroczyła do techniki, i to, w tym przypadku, do techniki wojskowej...

[5] N. Ashby, „Mercury" 1996, 25, 3, s. 23.