POSTĘPY FIZYKI – TOM 43 – ZESZYT 5 – 1992

Andrzej Krasiński

Centrum Astronomiczne PAN
im. Mikołaja Kopernika
Warszawa

Fizyka w niejednorodnym wszechswiecie

Physics in an inhomogeneous universe

Abstract: Einstein's theory of gravitation, from which all theoretical considerations of cosmology are derived, allows models of the Universe that are much more general than the classical Friedmann-Lemaitre models. This article presents some of the interesting geometrical and physical properties of a simple generalization of those models. The generalization was first derived from Einstein's equations by Lemaitre in 1933, and is known today as the "Tolman model".

1. Modele Friedmanna-Lemaitre'a (FLRW)

Od lat 20-tych niemal wszystkie teoretyczne rozważania kosmologii opierają się na pewnej, bardzo szczególnej klasie rozwiązań równań Einsteina. Przedstawimy je dokładniej w dalszym ciągu artykułu, tu podamy tylko ich krótki opis jakościowy.

Modele te wyprowadza się z równań pola grawitacyjnego (równań Einsteina) przy następujących założeniach o symetrii czasoprzestrzeni:

1. Istnieje w czasoprzestrzeni rodzina S 3-wymiarowych hiperpowierzchni typu przestrzennego, z których każda jest jednorodna.
2. Każda z hiperpowierzchni rodziny S jest izotropowa.
3. Wszystkie symetrie hiperpowierzchni rodziny S są symetriami całej czasoprzestrzeni.

Jednorodność oznacza, że istnieje 3-wymiarowa grupa symetrii, za pomocą której można każdy punkt przestrzeni przekształcić w każdy inny punkt. Fizycznie, jednorodność oznacza, że różne punkty przestrzeni są nierozróżnialne za pomocą pomiarów geometrycznych (a więc także za pomocą pomiarów gęstości, ciśnień i prędkości materii — przy założeniu, że ośrodkiem kosmicznym jest ciecz doskonała, wielkości te są bowiem jednoznacznie wyznaczone przez geometrię za

pośrednictwem równań pola). Izotropia względem punktu P oznacza, że w punkcie tym wszystkie kierunki są nierozróżnialne. W połączeniu z jednorodnością, izotropia oznacza, że nierozróżnialne są wszystkie kierunki w każdym punkcie przestrzeni.

Modele takie po raz pierwszy wprowadził A.A. Friedmann [1, 2] w latach 1922 i 1924, potem, niezależnie od niego, zrobił to G. Lemaitre [3] w r. 1927; ścisłą interpretację geometryczną założeń prowadzących do tych modeli podali, znów niezależnie od siebie, H.P. Robertson [4, 5] i A. G. Walker [6]. Od tych 4 nazwisk pochodzi przyjęta obecnie skrótowa nazwa tych modeli: FLRW.

Powyższy krótki opis pozwala zauważyć, że z punktu widzenia teorii Einsteina modele FLRW są bardzo szczególne. Ich wyjątkowa prostota wychodzi na jaw w całej okazałości przy dokładniejszym badaniu, które prowadzi do następujących wniosków:

1. Ogólne rozwiązanie równań Einsteina nie musi mieć żadnej symetrii [1] Modele FLRW mają natomiast 6-wymiarowe grupy symetrii - największe, przy których możliwa jest jeszcze ewolucja modelu w czasie (model z większą grupą symetrii musiałby być statyczny).

2. W ogólnym przypadku mamy do wyznaczenia z równań pola 6 funkcji, każda z nich zależy od 4 zmiennych (czterem spośród 10 składowych tensora metrycznego można nadać, w zasadzie, dowolną postać za pomocą transformacji współrzędnych). W modelach FLRW, założenia o symetrii redukują problem do wyznaczenia jednej funkcji jednej zmiennej (czasu). Cała dynamika geometrii i materii trywializuje się do opisu zmian w czasie gęstości materii, która w ustalonej chwili czasu jest taka sama w całej przestrzeni[2].

3. Ruch ośrodka ciągłego można charakteryzować przez ekspansję (tj. względną prędkość zmiany objętości), tensor rotacji i tensor deformacji (mówiąc w uproszczeniu, ten ostatni opisuje zmiany kształtu zespołów cząstek przy zachowaniu objętości zespołu, jest on zwykle nazywany ścinaniem). W modelach FLRW, z założeń o symetrii wynika, że rotacja i deformacja są równe zeru, zaś ekspansja jest w ustalonej chwili czasu taka sama w całej przestrzeni[3].

W powyższej charakterystyce autor zamierzał doprowadzić Czytelników do następującej konkluzji: czy nie byłoby rzeczą podejrzaną, gdyby tak wielki i skomplikowany układ jak cały Wszechświat był **ściśle** opisywany tak prymitywnym

---

[1] Ogólnego rozwiązania prawdopodobnie nigdy nie uda się znaleźć, ale znane są dziś przykłady, dość liczne, ścisłych rozwiązań nie mających żadnej symetrii.

[2] Znane są przykłady ścisłych rozwiązań, w których założenia (o symetrii lub inne) redukują liczbę funkcji niewiadomych, lecz pozostałe funkcje zależą początkowo od wszystkich czterech zmiennych i są wyznaczane z równań Einsteina.

[3] W ten sposób prawo Hubble'a jest wbudowane w modele FLRW poprzez założenia o symetrii. Znane są dziś ścisłe rozwiązania z nieznikającym ścinaniem i niejednorodną ekspansją. Znane są też rozwiązania z rotacją, ale we wszystkich z nich istnieją sprzężenia między rotacją, rozszerzaniem i ścinaniem powodujące, że rotacja nie jest wielkością niezależną i nie może być traktowana jako "czyste" rotacyjne zaburzenie modeli FLRW. Sprzężenia te są konsekwencją innych upraszczających założeń. Rozwiązania z rotacją zadowalającego pod względem matematycznej ogólności nie znaleziono do dziś.

modelem? Konkluzja ta narzuciła się co najmniej kilkudziesięciu różnym fizykom i już w latach 30-tych pojawiły się pierwsze próby uogólnienia modeli FLRW. Jedna z nich doprowadziła do modelu, który jest przedmiotem niniejszego artykułu. Wbrew spotykanym w literaturze stwierdzeniom, założenia, z których wyprowadzono modele FLRW, nie były podsumowaniem materiału obserwacyjnego, lecz były czysto matematycznymi założeniami zrobionymi w celu maksymalnego uproszczenia rachunków, przy zachowaniu jakościowej zgodności z wynikami obserwacji na poziomie minimum wymagań. Były więc tylko pierwszym przybliżeniem do dokładniejszych modeli.

Czytelnicy wiedzą zapewne o niedawnym odkryciu nierównomierności w rozkładzie temperatury promieniowania tła mikrofalowego. Odkrycie to zostało już ogłoszone jako jedno z najważniejszych w astronomii XX w. i będzie pewnie w przyszłości służyło jako uzasadnienie potrzeby uogólnień modeli FLRW. Z kronikarskiego obowiązku autor chciałby więc utrwalić na papierze co następuje: pomiary charakterystyk promieniowania tła były dotychczas używane do dokładnie odwrotnego celu. Przez ponad 20 lat coraz dokładniejsze pomiary stwierdzały, że ewentualne zaburzenia izotropii są mniejsze od błędu pomiaru. Opiniotwórcza część środowiska astronomicznego reagowała na to następująco: to fantastycznie! Wszechświat jest jednorodny i izotropowy, zaś modele FLRW są jego wierną reprezentacją! Prace nad uogólnieniami były prowadzone przez nielicznych fizyków, wbrew opinii środowiska.

2. Model Lemaitre'a-Tolmana

Jedno z dwu historycznie najwcześniejszych uogólnień modeli FLRW zostało znalezione przez G. Lemaitre'a[4] w r. 1933 [7]. Jego obszerny artykuł, dyskutujący różne matematyczne aspekty kosmologii, do dzisiaj nie został prawidłowo doceniony i bywa najczęściej cytowany jako omówienie modeli FLRW. Tymczasem, artykuł ten zawiera m.in. definicję masy dowolnego układu sferycznie symetrycznego (powtórnie odkrytą znacznie później przez Poduretsa [9] i Misnera-Sharpa [10]), dyskusję układów "quasistatycznych" (tu autor mimochodem odkrywa nowe rozwiązanie równań Einsteina, znalezione powtórnie i uogólnione przez Stephaniego w r. 1967 [11]), dowód nieosobliwości rozwiązania Schwarzschilda na horyzoncie (przeprowadzony niezależnie, w ściślejszy sposób, przez Kruskala [12] w r. 1960) oraz wczesne, dość jeszcze uproszczone i jakby nieśmiałe sformułowanie twierdzenia o osobliwościach, rozwiniętego potem przez Hawkinga, Penrose'a i Ellisa [13]. Również przedstawione poniżej rozwiązania równań Einsteina dla modelu L-T zostały w tej pracy wyprowadzone i dość szczegółowo przedyskutowane, w oparciu o własności funkcji eliptycznych. Niektóre własności fizyczne nowego modelu Lemaitre'a zostały zbadane przez Tolmana [14]

[4] W tym samym roku inne uogólnienie opublikował G.C. McVittie [8]. Nie będziemy zajmować się nim w artykule.

(który wyraźnie zaznaczył, że dyskutuje rozwiązanie z pracy [7]), niektóre własności geometryczne przedyskutował potem Bondi [15]. Przyjął się zwyczaj nazywać to rozwiązanie "modelem Tolmana" lub "Tolmana-Bondiego", choć pierwszeństwo historyczne należy bez żadnej wątpliwości do Lemaitre'a. Autor niniejszego artykułu proponuje dla tego modelu nazwę "Lemaitre'a-Tolmana" (L-T) dla pogodzenia historycznej sprawiedliwości z przyjętą już nazwą i dla odróżnienia od modeli FLRW.

Założenia prowadzące jednoznacznie do modelu L-T można sformułować następująco:

1. Istnieje w czasoprzestrzeni rodzina S hiperpowierzchni przestrzennych, z których każda jest izotropowa (tzn. sferycznie symetryczna) względem pojedynczego punktu.

2. Grupa symetrii hiperpowierzchni rodziny S jest równocześnie grupą symetrii całej czasoprzestrzeni.

3. Materia wypełniająca czasoprzestrzeń może być opisana jako pył, tzn. ośrodek, którego cząstki poruszają się po liniach geodezyjnych (czyli oddziałują ze sobą tylko poprzez pole grawitacyjne) i w którym ciśnienie jest równe zeru.

Modele FLRW mają wszystkie te własności oraz dodatkowo jednorodność (punkt 3 jest w modelach FLRW realizowany częściowo: materia porusza się po geodezyjnych, ale ciśnienie niekoniecznie jest równe zeru. Geodezyjność ruchu jest w modelach FLRW konsekwencją pozostałych założeń i nie musi być postulowana osobno). Widać stąd, że model L-T jest jednym z najprostszych możliwych uogólnień modeli FLRW. Jego geometria jest zdefiniowana następująco:[5] Forma metryczna jest postaci:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 &- \{R_r^2(t,r)/[1+f(r)]\}\mathrm{d}r^2 \\ &- R^2(t,r)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin\theta \mathrm{d}\phi^2), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $f(r)$ jest dowolną funkcją współrzędnej radialnej r, zaś funkcja $R(t,r)$ jest zdefiniowana przez równanie

$$R_{,t}^2 = f(r) + F(r)/R + \frac{1}{3}\Lambda R^2, \tag{2}$$

gdzie $F(r)$ jest drugą dowolną funkcją, zaś Λ jest stałą kosmologiczną, $R_{,r} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial R}{\partial r}, R_{,t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial R}{\partial t}$. Pole prędkości materii jest postaci $u^\alpha = [1,\ 0,\ 0,\ 0]$ (gdzie $(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3) = (t,\ r,\ \theta,\ \phi)$), tzn. współrzędna czasowa t jest czasem własnym obserwatorów współporuszających się z materią, zaś cząstki materii poruszają się po liniach: $\{r = \text{const},\ \theta = \text{const},\ \phi = \text{const}\}$. Gęstość materii ρ jest dana przez

$$\frac{8\pi G\rho}{c^2} = F_{,r}/(R^2 R_{,r}), \tag{3}$$

[5] Czytelnicy nie znający dokładniej teorii grawitacji Einsteina mogą ewentualnie opuścić całą resztę paragrafu 2 bez szkody dla zrozumienia całości artykułu.

gdzie G - stała grawitacyjna, c - prędkość światła w próżni. Równanie (2) jest całką pierwszą równań Einsteina, równanie (3) jest jednym z równań Einsteina. Modele FLRW (a ściślej ich podzbiór spełniający równanie stanu: $p = 0$, gdzie p jest ciśnieniem), otrzymuje się z modelu L-T przez przejście graniczne zdefiniowane równaniami (4), (5) i (6) poniżej:

$$f(r) = kr^2, \tag{4}$$

gdzie k jest stałą dowolną (indeksem krzywizny),

$$F = 2Mr^3, \tag{5}$$

gdzie M jest inną stałą dowolną (można ją interpretować jako średnią gęstość początkowego rozkładu masy w kuli o promieniu r. W modelach FLRW jest to wielkość stała, tzn. niezależna od wielkości kuli, w modelu L-T, jak widać, nie jest to prawdą),

$$R(t, r) = rS(t), \tag{6}$$

gdzie $S(t)$ jest czynnikiem skali — jedyną swobodną funkcją modeli FLRW. Fizyczną definicją przejścia granicznego do przypadku FLRW jest gęstość materii niezależna od współrzędnej radialnej, $\rho = \rho(t)$ (we współrzędnych współporuszających się).

W przypadku $F = \text{const}$ gęstość materii znika. Model L-T degeneruje się wtedy do rozwiązania Schwarzschilda przedstawionego we współrzędnych geodezyjnych. Z faktu, że rozwiązania FLRW i Schwarzschilda są równocześnie przypadkami szczególnymi modelu L-T wynika możliwość kombinowania ("sklejania") tych rozwiązań w jedną czasoprzestrzeń poprzez odpowiedni dobór zależności funkcji dowolnych od r. Z możliwości tej skorzystamy w dalszym ciągu artykułu.

Znane są dziś uogólnienia modelu L-T znalezione przez Szekeresa [16] i Szafrona [17], są one przykładami rozwiązań bez symetrii, model L-T jest ich sferycznie symetryczną granicą. Ponieważ nie przewidują one radykalnie nowych efektów, są natomiast bardziej skomplikowane analitycznie, ograniczymy naszą dyskusję do modelu L-T.

Równanie (2) można rozwiązać. Gdy $\Lambda \neq 0$, rozwiązanie zależy od funkcji eliptycznych. Ponieważ stała kosmologiczna nie wprowadza nowych efektów fizycznych, komplikuje natomiast rachunki, założymy, że $\Lambda = 0$ (Lemaitre [7] przedyskutował pełne rozwiązania). Rozwiązania równania (2) można wtedy zapisać w postaci parametrycznej następująco:
Gdy $f(r) < 0$:

$$R(t, r) = -\frac{F(r)}{2f(r)}(1 - \cos\eta),$$

$$\eta - \sin\eta = \frac{2(-f)^{3/2}}{F(r)}[t - t_0(r)]. \tag{7}$$

Gdy $f(r) = 0$:

$$R(t,r) = \{\frac{9}{4}F(r)[t - t_0(r)]^2\}^{1/3}. \tag{8}$$

Gdy $f(r) > 0$:

$$R(t,r) = \frac{f(r)}{2f(r)}(\cosh\eta - 1),$$

$$\sinh\eta - \eta = \frac{2f^{3/2}}{F(r)}[t - t_0(r)]. \tag{9}$$

(Formalnie możliwy jest także przypadek $F < 0$, $f > 0$, lecz wykluczamy go ze względu na interpretację fizyczną $F(r)$, zob. uwagę po wzorze (10)). Algebraiczna zależność R od t jest we wszystkich przypadkach taka sama jak w modelach FLRW (także równanie(2) ma identyczną postać w modelach FLRW). Różnica polega na tym, że w granicy FLRW funkcje $F(r)$ i $f(r)$ mają ściśle określoną zależność od r, natomiast t_0 jest stałą dowolną; w rezultacie (R/r) nie zależy od r. W modelu L-T mamy 3 funkcje dowolne zmiennej r i one właśnie zapewniają bogactwo zjawisk przewidywanych przez ten model.

Zauważmy, że równanie (2) sugeruje pewną interpretację fizyczną funkcji $f(r)$ i $F(r)$. Gdy $\Lambda = 0$, równanie to staje się formalnie identyczne z równaniem ruchu radialnego cząstki w newtonowskim potencjale $V = -GM/R$; w modelu L-T opisuje ono ewolucję kulistej powłoki materii o ustalonej współrzędnej r. Dla porównania z przypadkiem newtonowskim wygodniej jest równanie (2) przepisać w postaci:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(R/r)\right]^2 = f(r)/r^2 + \frac{F(r)/r^3}{R/r} + \frac{1}{3}\Lambda(R/r)^2. \tag{10}$$

Teraz widać, co następuje: $f(r)/r^2$ jest analogiem energii cząstki w nieskończoności przestrzennej (oraz miarą prędkości początkowej), zaś wielkość $[F(r)/(2r^3)]$ jest analogiem masy zawartej wewnątrz powłoki $r = \text{const}$. Bliższe badanie wskazuje, że interpretacja ta jest prawidłowa i nasuwa właściwe skojarzenia. W modelach FLRW wielkości $(f(r)/r^2)$ i $[F(r)/(2r^3)]$ są stałe (takie same dla wszystkich powłok), w modelu L-T dane początkowe dla różnych powłok są od siebie niezależne.

Trzecia funkcja dowolna, $t_0(r)$, opisuje nowy efekt, nieopisywany przez modele FLRW. W chwili $t = t_0$ występuje osobliwość w czasoprzestrzeni: gęstość materii dąży do nieskończoności, wyznacznik tensora metrycznego staje się równy zeru. W modelach FLRW, gdzie $t_0 = \text{const}$, osobliwość ta występuje równocześnie dla wszystkich cząstek: cała materia Wszechświata jest wyrzucana z pojedynczego punktu (zdarzenia) w czasoprzestrzeni w tej samej chwili czasu. W modelu L-T, osobliwość początkowa jest trójwymiarowym zbiorem (nie można nazywać go podprzestrzenią, bo forma metryczna (1) jest na nim osobliwa i nie indukuje żadnej 3-wymiarowej formy metrycznej). O fizycznych konsekwencjach tego faktu powiemy dalej.

Przedyskutujemy teraz poszczególne własności modelu L-T, których nie można było oczekiwać na podstawie modeli FLRW.

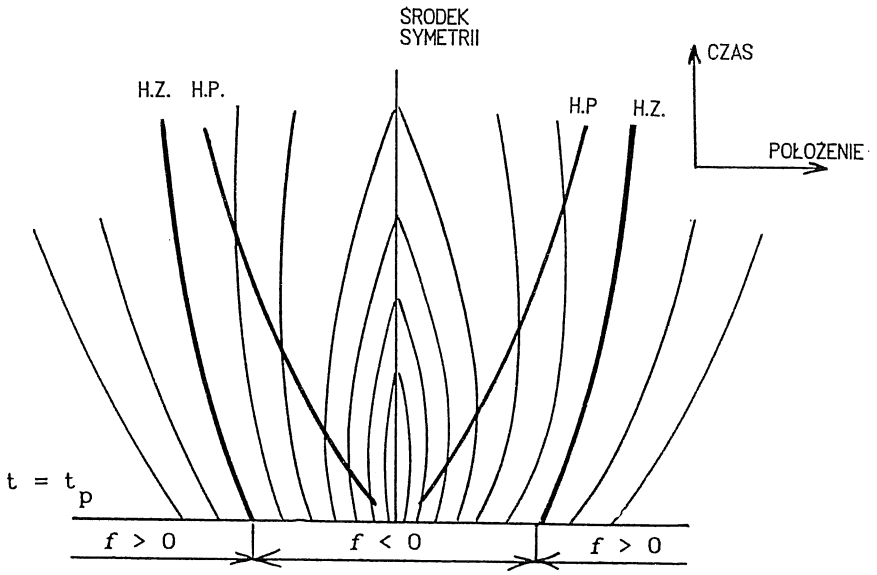
3. Przestrzenna zmienność indeksu krzywizny

W modelach FLRW wielkość $f(r)/r^2 = -k$ jest globalną stałą, zaś jej znak ma istotne konsekwencje dynamiczne: przy $k > 0$ i $\Lambda = 0$ Wszechświat będzie rozszerzał się tylko przez skończony czas (zależny od warunków początkowych), po którym zacznie zapadać się z powrotem do osobliwości punktowej. Przy $k \leq 0$ i $\Lambda = 0$, Wszechświat będzie rozszerzał się stale, zaś objętość każdego ustalonego zespołu cząstek Wszechświata będzie rosnąć do nieskończoności. W modelu L-T, znak wielkości $[f(r)/r^2]$ ma dokładnie te same konsekwencje (por. wzory (7) - (9)), lecz tutaj dowolna funkcja $f(r)$ może mieć różne znaki w różnych częściach przestrzeni. Niech $f(r)/r^2$ będzie ujemne w obszarze I przestrzeni oraz dodatnie w obszarze II. Jeśli obserwatorzy w takim Wszechświecie będą usiłowali dopasować modele FLRW do wyników swoich obserwacji, to obserwator w obszarze I stwierdzi, że najlepszy jest model z krzywizną dodatnią, natomiast obserwator w obszarze II stwierdzi, że najlepszy jest model z krzywizną ujemną. Obszar I będzie rozszerzał się przez czas skończony i zapadnie się z powrotem, obszar II będzie rozszerzał się stale. Zależnie od przestrzennego usytuowania obszarów I i II możliwe są rozmaite efekty fizyczne:

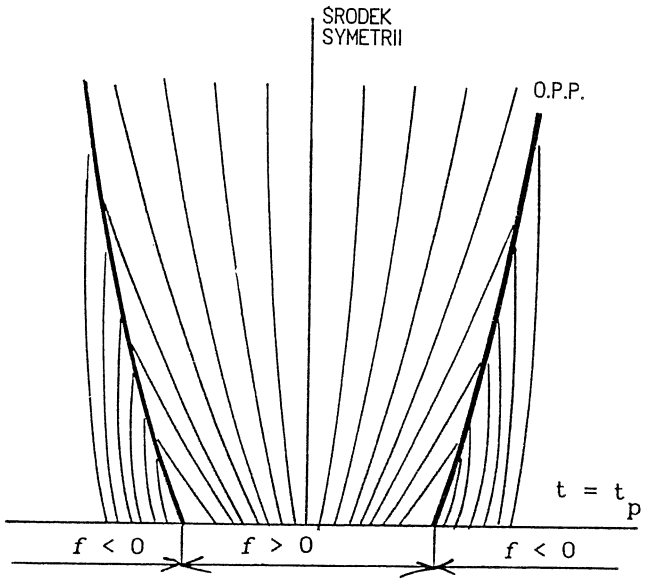
1. Jeśli obszar I (o skończonym czasie istnienia) znajduje się wewnątrz obszaru II (rys. 1), to taki model L-T może służyć do opisu powstawania czarnej dziury w rozszerzającym się Wszechświecie [18, 19]. Dobierając odpowiednio warunki początkowe (rozmiary obszaru I, wartości funkcji $f(r)$ i $F(r)$) można uzyskać opis czarnej dziury o dowolnej masie i czasie zapadania. Matematyczna teoria czarnych dziur jest dobrze sformułowana w czasoprzestrzeniach stacjonarnych i asymptotycznie płaskich, opisuje więc już utworzone czarne dziury obserwowane z daleka. Tymczasem, rozwiązanie L-T jest oczywistym kandydatem (bardzo mało dotychczas wykorzystanym) do opisu procesu powstawania czarnej dziury, obserwowanego z dowolnego miejsca przestrzeni.

2. Jeśli obszar I znajduje się na zewnątrz obszaru II (rys. 2), to po pewnym czasie strumień materii z obszaru I, zapadającej się ku osobliwości końcowej, zacznie przecinać się ze strumieniem z obszaru II, wciąż rozszerzającym się. Powstaje w ten sposób dodatkowa osobliwość, nazywana osobliwością przecinających się powłok (shell crossing singularity). Jest to ten trójwymiarowy zbiór punktów, na którym $R_{,r} = 0$; jak widać z (3), $\rho \to \infty$ przy $R_{,r} \to 0$. Intuicja podpowiada, że osobliwość ta jest skutkiem założenia $p = 0$ i nie powinna powstawać, gdy ciśnienie ma różny od zera gradient przestrzenny. Model L-T nie pozwala jednak na opis takiej sytuacji zaś odpowiednio ogólne rozwiązania równań Einsteina nie są jeszcze znane.

Przypadki 1 i 2 zachodzą, gdy funkcja $f(r)$ zmienia znak dla pewnego r. Fizycznie ważne zjawiska mogą występować także przy ustalonym znaku $f(r)$, zależnie od lokalnych wartości $F(r)/f(r)$, na przykład:



Rys. 1. Powstawanie czarnej dziury w modelu L-T. Cała materia, która w chwili początkowej znajdowała się w obszarze $f(r) < 0$, wpadnie w końcu do czarnej dziury. HP - horyzont pozorny (powierzchnia rosnącej czarnej dziury), HZ - horyzont zdarzeń. Żaden sygnał wysłany spod horyzontu zdarzeń nie wydostanie się do nieskończoności przestrzennej, żaden sygnał spod horyzontu pozornego nie może rozchodzić się w dal od środka symetrii. Niezmienniczą miarą odległości przestrzennej w hiperpowierzchni $t = \text{const}$ jest funkcja $R(t, r) = (\text{powierzchnia orbity symetrii})/4\pi$



Rys. 2. Powstawanie osobliwości przecinających się powłok (OPP). Może ona powstać także wtedy, gdy $f(r)$ ma ustalony znak w całej przestrzeni, ale mechanizm jej powstawania najłatwiej jest zrozumieć w sytuacji przedstawionej na rysunku. Osobliwość początkowa (nie zaznaczona) znajduje się wcześniej od hiperpowierzchni $t = t_p$

3. Obszar rozszerzający się szybciej może otaczać obszar rozszerzający się wolniej, w którym kontrast gęstości materii $|\rho_I - \rho_{II}|/\rho_I$, rośnie z czasem. Układ taki może służyć do opisu powstawania zagęszczeń materii we Wszechświecie. Już w r. 1956 Bonnor [20] użył takiej właśnie konfiguracji modelu L-T do opisu powstawania galaktyk. Wywnioskował on, że jeśli kondensacje powstały ok. 1000 lat po Wielkim Wybuchu, to aby mogły powstać galaktyki o obserwowanych dziś gęstościach, początkowe zaburzenia powinny być ok. 10^{28} razy większe niż statystyczne fluktuacje gęstości materii w ośrodku przestrzennie jednorodnym. Problem tej rozbieżności do dziś nie został rozwiązany: fluktuacje statystyczne są za małe dla wytworzenia galaktyk, nawet jeśli pojawiają się w ułamek sekundy po Wielkim Wybuchu. Jest on jednak problemem jedynie wtedy, gdy upieramy się, aby Wszechświat opisywać za pomocą modeli FLRW. W modelu L-T niejednorodny rozkład materii, z dowolnymi amplitudami niejednorodności, może wynurzać się bezpośrednio z wybuchu początkowego (zob. par. 4).

4. Przy odpowiednio dużej początkowej koncentracji masy wokół środka symetrii, zapadanie się materii w gęstszym obszarze może doprowadzić do powstania gołej (tzn. nie ukrytej pod horyzontem) osobliwości [19]. Sformułowana przeszło 30 lat temu przez Penrose'a "hipoteza cenzury kosmicznej" (c.k.) [21] stwierdza, że sytuacja taka nie może się zdarzyć. Kontrprzykłady dla tak prostego sformułowania tej hipotezy były znajdowane już od dawna (jeden z pierwszych, znaleziony przez Yodzisa, Seiferta i Müllera zum Hagena w r. 1973 [22], był szczególnym przypadkiem modelu L-T) i zmuszały do stopniowego obwarowywania hipotezy c.k. zastrzeżeniami. Na przykład, jedno z uściśleń c.k. stwierdza, że goła osobliwość nie może wystąpić w sytuacji ogólnej, natomiast rozwiązania równań Einsteina, które zawierają gołą osobliwość, są niestabilne względem zaburzeń pola grawitacyjnego. Badanie stosowalności hipotezy c.k. opiera się nie tylko na ścisłych rozwiązaniach równań Einsteina, ale model L-T jest bardzo ważnym przykładem testowym, nie do końca jeszcze wykorzystanym.

5. Obszar rozszerzający się szybciej może być otoczony obszarem rozszerzającym się wolniej. Ta konfiguracja modelu L-T została wykorzystana przez Sato [23] do dobrze zgodnego z obserwacjami opisu powstawania wielkoskalowej struktury we Wszechświecie. Opiszemy ten proces dokładniej w par. 5.

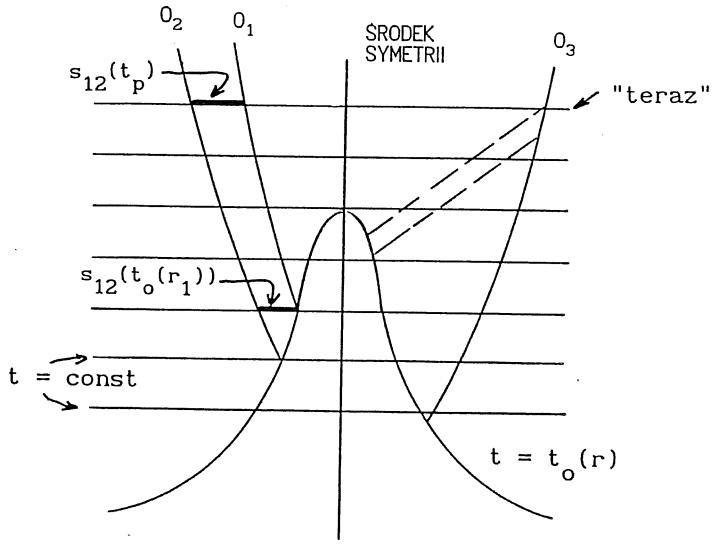
4. Osobliwości w modelu L-T

Wspomnieliśmy już w zakończeniu par. 2, że osobliwość przy $t = t_0(r)$, przechodząca w granicy FLRW w Wielki Wybuch, nie jest pojedynczym zdarzeniem w czasoprzestrzeni, lecz zbiorem trójwymiarowym. Widać to łatwo z formy metrycznej (1): wzdłuż linii świata $r = r_1$ przy $t = t_0(r_1)$ mamy $R(t_0(r_1), r_1) = 0$, lecz na ogół wzdłuż innej linii świata $r = r_2$ jest $R\ (t_0(r_1), r_2) \neq 0$. Wobec tego, przestrzenna odległość cząstki r_2 od cząstki r_1, w dowolnej chwili $t = t_p$ równa:

$$s_{12} = \int_{r_1}^{r_2} (-g_{rr})^{1/2} \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} [1 + f(r)]^{-1/2}\, R_r(t_p, r) \mathrm{d}r =$$

$$= [1 + f(\bar{r})]^{-1/2} [R(t_p, r_2) - R(t_p, r_1)] \tag{11}$$

nie dąży do zera gdy $t_p \to t_0(r_1)$, por. rys. 3 (skorzystaliśmy w (11) z twierdzenia



Rys. 3. Nierównoczesność wybuchu początkowego i centrum opóźnionej ekspansji. Osobliwość początkowa $t = t_0(r)$ jest, przy wyborze współrzędnej czasowej zgodnym ze wzorem (1), procesem rozciągniętym w czasie — obserwatorzy O_1 i O_2 wynurzają się z osobliwości w różnych chwilach. Obserwator O_3 odbiera promieniowanie wysłane przez centrum opóźnionego rozszerzania się. Odległość s_{12} jest dana wzorem (11)

o wartości średniej, $\bar{r}$ jest stałą spełniającą $r_1 \leq \bar{r} \leq r_2$). Zatem, różne cząstki materii wynurzają się z osobliwości początkowej w różnych chwilach czasu[6]. Osobliwość przecinających się powłok wspomniana w punkcie 2 poprzedniego paragrafu może, przy odpowiednim doborze funkcji f, F i t_0, być usunięta całkowicie z czasoprzestrzeni (równanie $R_r = 0$ nie ma wtedy rozwiązań). Można też wybrać funkcje tak, że wzdłuż każdej linii świata $r = \text{const}$ osobliwość przecinających się powłok zdarzy się wcześniej lub równocześnie z osobliwością początkową $R = 0$. Ponieważ fizyka i astrofizyka mogą być w takim modelu uprawiane tylko dla czasów późniejszych od $R = 0$, w takiej konfiguracji osobliwość przecinających się powłok jest astrofizycznie nieistotna. W pozostałych przypadkach trzeba brać pod uwagę możliwość wystąpienia dodatkowych (w stosunku do modeli FLRW) efektów.

Ciekawą możliwość zaproponował Nowikow w r. 1964 [24]. Wybuch początkowy w okolicach środka symetrii modelu L-T może być opóźniony w stosunku do pozostałych obszarów. Obserwator umieszczony z dala od środka może wtedy **widzieć** na niebie zlokalizowany przestrzennie sygnał wysyłany przez materię właśnie wynurzającą się z osobliwości początkowej. Model L-T może opisać tylko

[6]Synchronizacja zdefiniowana przez współrzędną t jest wyróżniona geometrycznie (powierzchnie $t = \text{const}$ są ortogonalne do pola prędkości u^α) i fizycznie i równoczesność w jej sensie jest faktem niezmienniczym.

jedno takie "centrum opóźnionej ekspansji". Zauważmy jednak, że opierając się na rozwiązaniu L-T można skonstruować model z bogatszą strukturą. Mianowicie, można wybrać funkcje $F(r)$, $f(r)$ i $t_0(r)$ tak, aby dla $r > r_0$ (gdzie r_0 jest dowolną stałą) były one równe, odpowiednio: Mr^3, $-kr^2$ i stałej. Wtedy, w obszarze $r < r_0$ mamy model L-T, który dla $r > r_0$ degeneruje się do modelu FLRW. Mamy więc ścisłe rozwiązanie opisujące zlokalizowane zaburzenie nałożone na tło FLRW. Ze względu na jednorodność obszaru FLRW można na to tło nałożyć dowolną liczbę zaburzeń L-T w różnych obszarach. W takim modelu możemy mieć dowolnie wiele centrów opóźnionej ekspansji. Nowikow próbował objaśnić w ten sposób źródło energii kwazarów. Wyjaśnienie to zostało zarzucone po odkryciu promieniowania mikrofalowego, którego izotropowy rozkład nie dał się pogodzić z silnymi zaburzeniami wynikającymi z modelu Nowikowa. Istnienie centrów opóźnionej ekspansji pozostaje jednak nadal teoretyczną możliwością.

5. Struktura "komórkowa" Wszechświata

Wzór na gęstość materii w modelu L-T można zapisać w postaci:

$$\frac{8\pi G}{c^4}\rho = \frac{3F_{,r}}{(R^3)_{,r}} \tag{12}$$

Zatem, przy ustalonym t, przestrzenne maksima i minima gęstości, jeśli istnieją, to spełniają równanie

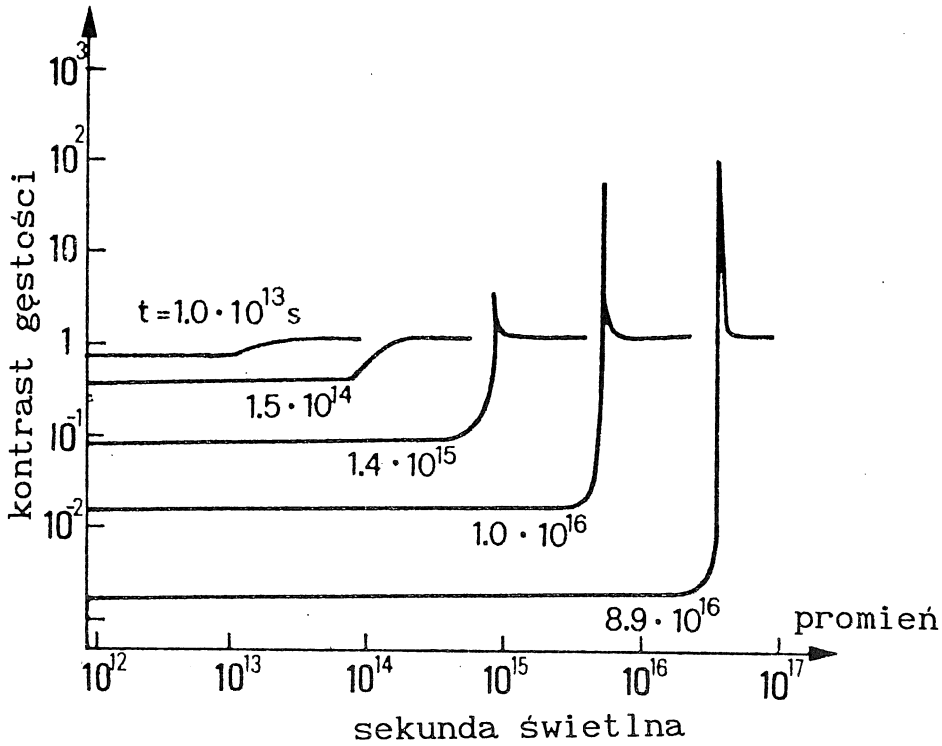
$$F_{,rr}\,(R^3)_{,r} - F_{,r}\,(R^3)_{,rr} = 0. \tag{13}$$

W najprostszym przypadku, $f(r) = 0$, równanie to sprowadza się do

$$(-2FF_{,rr}\,t_{0,r} + 4F_{,r}^2\,t_{0,r} + 2FF_{,r}\,t_{0,rr})(t - t_0) - 2FF_{,r}\,t_{0,r}^2 = 0 \tag{14}$$

Jest to uwikłana definicja pewnych wartości $r = r_{\mathrm{m}}$. Zauważmy, że na ogół $r_{\mathrm{m}} = r_{\mathrm{m}}(t)$, a więc przestrzenne minima i maksima gęstości nie współporuszają się z materią, lecz wędrują niezależnie od linii prądu materii (fachowo nazywa się to wędrówką fal gęstości). Wartości r_{m} zdefiniowane przez (14) są niezależne od czasu jedynie gdy $F_{,r} = 0$ (wtedy model L-T degeneruje się do rozwiązania Schwarzschilda) lub $t_{0,r} = 0$ (wtedy wybuch początkowy jest równoczesny). Wędrówka fal gęstości występuje także w pozostałych dwu przypadkach ($f < 0$ i $f > 0$). Jej dokładne zbadanie wymaga w każdym przypadku numerycznego badania równania (13).

Badanie takie przeprowadził w latach 1982–1984 H. Sato ze współpracownikami [23] i uzyskał wyniki jakościowo zgodne z obserwacjami astronomicznymi (rys. 4). Okazało się, że jeśli w chwili początkowej istnieje we Wszechświecie obszar o obniżonej gęstości otoczony obszarem wyższej gęstości, to granica między tymi obszarami zacznie uciekać na zewnątrz, w kierunku wyższej gęstości, z prędkością większą od prędkości kosmicznego rozszerzania się. Na uciekającej granicy



Rys. 4. Ewolucja rozrzedzenia materii w modelu L-T. Współrzędną pionową jest stosunek gęstości w rozrzedzeniu do gęstości na zewnątrz. Kontrast gęstości, $\rho_V - \rho_b|/\rho_b$ rośnie z czasem, brzeg rozrzedzonego obszaru ucieka z prędkością większą od prędkości kosmiczngo rozszerzania się. Gdy tłem jest obszar FLRW z dodatnią krzywizną, zaś początkowy rozmiar rozrzedzenia jest odpowiednio duży, rozrzedzenie wypełni całą przestrzeń przed zapadnięciem się materii do osobliwości końcowej (rysunek skopiowany z [23] za zgodą Autora i Wydawcy)

obszarów tworzy się cienka powłoka o wzrastającej gęstości, która własnym polem grawitacyjnym wciąga do swojego wnętrza dodatkową materię z otoczenia (Sato nazwał ten proces "mechanizmem pługu śnieżnego"). Ściśle mówiąc, powłoka po skończonym czasie przekształca się w osobliwość przecinających się powłok, ale sądzi się (i istnieją już argumenty numeryczne popierające to domniemanie), że różne od zera ciśnienie zapobiegnie utworzeniu osobliwości. Model L-T jest zbyt prosty, nie dopuszcza niezerowego ciśnienia, zaś wystarczająco ogólne ścisłe rozwiązanie równań Einsteina nie jest znane.

Powyższy opis dotyczy pojedynczej powłoki uciekającej od jednego centrum. Model L-T jest znów zbyt prosty na opisanie ogólniejszej sytuacji, ale w tym przypadku możemy sobie pomóc w sposób formalnie poprawny. Podobnie, jak zrobiliśmy to w par. 4, wystarczy rozpatrzyć taki model L-T, który w pewnej odległości od centrum symetrii przechodzi w ścisły model FLRW. W jednorodnym tle FLRW można wtedy wydzielić dowolną liczbę innych centrów otoczonych regionami L-T i będzie to ścisły model wielu rozszerzających się powłok.

Od momentu, gdy pierwsze powłoki zaczną się zderzać, model powyższy bez-

apelacyjnie przestaje działać, dalszego ciągu procesu można znów tylko domyślać się: kuliste powłoki powinny rozpłaszczyć się o siebie i pozostać na miejscach zderzeń, tworząc sieć nieregularnych (rożne powłoki mają na ogół różne promienie) wielościanów. Właśnie taki obraz wielkoskalowego rozkładu materii wynika z ostatnich obserwacji: galaktyki i gromady galaktyk grupują się w cienkie powłoki otaczające duże obszary pustej przestrzeni — por. pracę Melotta [25], w której podjęto ciekawą próbę mierzenia topologii przestrzennego rozkładu materii.

Jako ciekawostkę powtórzmy za pracą Sato [23] następujący fakt: po przejściu do granicy newtonowskiej, równanie ruchu powłok pokrywa się z równaniem propagacji fal eksplozyjnych, wyprowadzonym przez Sedova [26]. Ekspansję powłoki można więc uważać za eksplozję i jest to analogia ścisła.

Problem powstawania rozrzedzeń w rozkładzie materii był po raz pierwszy rozpatrywany przez Sena już w r. 1934 [27, 28]. Sen wykazał, używając modelu L-T, że początkowe rozrzedzenie w jednorodnym tle będzie z czasem powiększać swoje rozmiary i kontrast $|\rho_V - \rho_b|/\rho_b$, gdzie ρ_V jest gęstością materii w rozrzedzeniu, ρ_b gęstością tła. Była to wyraźna informacja, że należy oczekiwać tworzenia się rozrzedzeń we Wszechświecie. Została ona jednak zignorowana przez ogół astronomów, którzy, parafrazując powiedzenie G. F. R. Ellisa, *"wiedzieli"*, że Wszechświat jest jednorodny i izotropowy.

6. Wpływ rozszerzania się Wszechświata na układy planetarne

Pole grawitacyjne materii Wszechświata (tzn. galaktyk innych niż nasza) przenika Układ Słoneczny. Podejrzewano już dawno, że rozszerzanie się Wszechświata, powodujące zmienność w czasie kosmicznego pola grawitacyjnego, może mieć wpływ na orbity planet. Próbę obliczenia tego efektu (nie pierwszą historycznie, ale najlepiej dziś znaną) podjęli A. Einstein i E.G. Straus w r. 1945 [29]. Założyli oni, że Wszechświat opisywany modelem FLRW zawiera wewnątrz pustą dziurę, w której środku znajduje się Słońce. Przy odpowiednim dopasowaniu rozmiaru dziury (zmiennego w czasie) i masy Słońca konfiguracja taka okazała się zgodna z równaniami pola grawitacyjnego (masa Słońca musi być równa masie ośrodka kosmicznego usuniętego z dziury). W takiej konfiguracji orbity planet nie reagują na rozszerzanie się Wszechświata. Wniosek ten został na wiele lat przyjęty jako ogólne prawo wynikające z teorii Einsteina. Tymczasem, rozważania par. 5 sugerują, że konfiguracja Einsteina-Strausa jest niestabilna. Rodzina konfiguracji Einsteina-Strausa, numerowana tylko jednym stałym parametrem (średnią kosmiczną gęstością materii w chwili początkowej) tworzy zbiór miary zero w rodzinie modeli L-T, numerowanej dwiema funkcjami dowolnymi zmiennej r (trzecia funkcja dowolna może być dowolnie przekształcona przez transformacje współrzędnej r, nie wiąże się ona zatem z ogólnością rozwiązania, lecz z dowolnością wyboru współrzędnych, wbudowaną w teorię Einsteina). Przy zbyt małej masie Słońca brzeg dziury będzie oddalał się od jej centrum szybciej niż cząstki "kosmicznego płynu", i będzie przy tym gromadził dodatkową materię. Przy zbyt dużej masie Słońca brzeg dziury zacznie poruszać się ku jej centrum i dążyć do

zapełnienia pustki materią. W konfiguracji stabilnej, kosmiczny rozkład materii musi rozciągać sie po całej objętości układu planetarnego. Konfigurację taką zbadał Gautreau [30] opierając się na modelu Lemaitre'a-Tolmana (choć nie jest łatwo przekonać się, że użył on właśnie tego modelu, pracował bowiem w innych współrzędnych). Okazało się, że planety nie mogą mieć orbit kołowych. Promień każdej orbity będzie zmieniał się z czasem według wzoru:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{8\pi G}{c^4}\rho S^4 H/2M, \tag{15}$$

gdzie G, c i ρ mają to samo znaczenie, co we wzorze (3), S jest odległością między planetą i Słońcem, $H = R_{,t}/R$ jest stałą Hubble'a, M jest masą Słońca. Efekt ten, jak widać, jest większy dla orbit o dużych promieniach, dla Saturna wynosi on:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 6 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{m/rok}. \tag{16}$$

Rozszerzanie się Wszechświata ma więc wpływ na orbity planet, ale niestety jest on zbyt mały, aby go zmierzyć (podana wyżej wielkość jest mniejsza od średnicy protonu).

Warto przy okazji wyjaśnić pewne zadawnione historyczne nieporozumienie dotyczące omawianego problemu. Wpływ rozszerzania się Wszechświata na orbity planet był badany przez McVittiego [8] i Järnefelta [31] w przy użyciu rozwiązania McVittiego [8]. Wyniki tych prac nie nadają się do bezpośredniego ilościowego wykorzystania, autorzy nie zadbali bowiem o zdefiniowanie jednostki długości w sposób niezmienniczy. W rozszerzającej się przestrzeni jest to nietrywialny problem. Nie można prowadzić rachunków perturbacyjnych, gdy mały parametr rachunku jest funkcją czasu, a właśnie taki błąd popełnił Järnefelt (Gautreau [30] rozwiązał problem definicji jednostki odległości poprawnie). Praca Järnefelta pokazuje jednak, że rozszerzanie się Wszechświata ma wpływ na orbity planet. Autor zamierzał natomiast pokazać, że wpływ taki nie istnieje i jako konkluzję swojej pracy podał stwierdzenie: "Orbita planety podczas danego okresu[7] nie odchyli się zatem znacząco od orbity newtonowskiej". W późniejszej pracy, Einstein i Straus [32] przytoczyli wyniki McVittiego i Järnefelta jako potwierdzenie swojego wyniku z r. 1945, przemilczając przy tym fakt, że w pracy [29] kosmologiczne rozszerzanie się orbit było równe zeru **dokładnie**.

7. Zakończenie

Niniejszy artykuł przedstawia jedynie niewielki wybór materiału z dość już obszernej literatury dotyczącej niejednorodnych modeli kosmologicznych. Pełny przegląd literatury na ten temat jest przygotowywany przez autora niniejszego artykułu. Prace te miały dotychczas większe znaczenie dla teorii grawitacji (poprzez

[7] Autor miał tu na myśli wiek Wszechświata.

poszerzenie wiedzy o metodach generacji i interpretacji ścisłych rozwiązań równań Einsteina) niż dla astrofizyki. Zebrany w nich materiał może jednak okazać się wystarczający dla otwarcia nowego kierunku w astrofizyce relatywistycznej: badania obserwowalnych efektów przewidywanych przez niejednorodne modele kosmologiczne. Z punktu widzenia teorii grawitacji byłoby to bardzo pożądane zbliżenie teorii do eksperymentu.

Literatura

[1] A.A. Friedmann, *Z. Physik* **10**, 377 (1922).

[2] A.A. Friedmann, *Z. Physik* **21**, 326 (1924).

[3] G.Lemaitre, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **A47**, 19 (1927) [angielskie tłumaczenie: *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **91**, 483 (1931)].

[4] H.P. Robertson, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **15**, 822 (1929).

[5] H.P. Robertson, *Rev. Mod. Phys.* **5**, 62 (1933).

[6] A.G. Walker, *Quart. J. Math. Oxford, ser.* **6**, 81 (1935).

[7] G. Lemaitre, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **A53**, 51 (1933).

[8] G.C. McVittie, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **93**, 325 (1933).

[9] M.A. Podurets, *Astron. Zh.* **41**, 28 (1964) [*Sov. Astr. A. J.* **8**, 19 (1964)].

[10] C.W. Misner, D.H. Sharp, *Phys. Rev. B* **136**, 571 (1964).

[11] H. Stephani, *Commun. Math. Phys.* 4, 137 (1967).

[12] M. Kruskal, *Phys. Rev.* **119**, 1743 (1960).

[13] S.W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of spacetime*, Cambridge University Press 1973.

[14] R.C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **20**, 169 (1934).

[15] H. Bondi, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **107**, 410 (1947).

[16] P. Szekeres, *Commun. Math. Phys.* **41**, 55 (1975).

[17] D.A. Szafron, *J. Math. Phys.* **18**, 1673 (1977).

[18] M. Demiański, J.P. Lasota, *Nature Phys. Sci.* **241**, 53 (1973).

[19] G. Grillo, *Class. Quantum Gravity* **8**, 739 (1991).

[20] W.B. Bonnor, *Z. Astrophysik* **39**, 143 (1956).

[21] R. Penrose, w: *Battelle Rencontres (1967 lectures in mathematics and physics).* red. C. M. de Witt i J. A. Wheeler. Benjamin, New York, Amsterdam, 1968, s. 121.

[22] P. Yodzis, H. J. Seifert, H. Müller zum Hagen, *Commun. Math. Phys.* **34**, 135 (1973).

[23] H. Sato, w: *General relativity and gravitation.* red. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascolini. D. Reidel, Dordrecht 1984, s. 289.

[24] I.D. Nowikow, *Astron. Zh.* **41**, 1075 (1964) [*Sov. Astr. A. J.* **8**, 857 (1964)].

[25] A.L. Melott, *Phys. Rep.* **193**, nr 1, 1 (1990).

[26] L.I. Sedov, *Similarity and dimensional methods in mechanics*, Academic Press, New York 1959, s. 105.

[27] N.R. Sen, *Z. Astrophysik* **9**, 215 (1934).

[28] N.R. Sen, *Z. Astrophysik* **10**, 291 (1935).

[29] A. Einstein, E.G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 120 (1945).

[30] R. Gautreau, *Phys. Rev.* **D29**, 198 (1984).

[31] G. Järnefelt, *Ann. Acad. Soc. Sci. Fennicae* **A55**, nr 3, 3 (1940).
[32] A. Einstein, E. G. Straus, *Rev. Mod. Phys.* **18**, 148 (1946).